ANCA GABRIELA POPA

REZISTENȚA MATERIALELOR

Îndrumător de lucrări

Ediție pe CD-ROM

UTPRESS
Cluj-Napoca, 2010

Editura U.T.PRESS
Str. Observatorului nr. 34
C.P. 42, O.P. 2, 400775 Cluj-Napoca
Tel.:0264-401999; Fax: 0264 - 430408
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
http://www.utcluj.ro/editura

Director: Prof.dr.ing. Daniela Manea
Consilier editorial: Ing. Călin D. Câmpean

Editură acreditată CNCSIS, COD 161.

Recenzia: Prof.dr.ing. Cornel Bia
Prof.dr.ing. Eugen Pantel
Prof.dr.ing. Ironim Marțian

Tehnoredactare: Autorul
Corectat: Autorul
Grafica: Adrian Bojan

Copyright © 2010 Editura U.T.PRESS
Toate drepturile asupra versiunii în limba română aparțin Editurii U.T.PRESS.
Reproducerea integrală sau parțială a textului sau ilustrațiilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii U.T.PRESS.

ISBN 978-973-662-597-8
Bun de tipar: 15.10.2010
Tiraj: 100 exemplare

PREFAȚĂ

Rezistența Materialelor este o disciplină de prim ordin în pregătirea profesională a studenților, familiarizându-i pe aceștia cu introducerea, utilizarea și respectarea normelor, rigorilor și gândirii tehnice. Fiind prima dintre disciplinele ingineresti, ea deschide în fața studenților universul tehnic, având un rol fundamental în educarea profesional-științifică a viitorilor ingineri.

Cunoștințele de Rezistența Materialelor se pot dobândi numai printr-un studiu profund, alăturând înțelegerea teoretică a abordării problemelor cu partea aplicativă a acestora, urmărindu-se rezolvarea lor concretă, tehnică, până la final: alegerea materialului, formei și a dimensiunilor elementelor de construcții.

Îndrumătorul de lucrări constituind volumul de față înmănunchează experiența de mai mulți ani a autoarei în predarea acestei discipline.

El se adresează în primul rând studenților ingineri de la Facultatea de Construcții, dar poate să fie utilizat cu folos și de studenții de la Colegiu sau ai altor facultăți cu profil tehnic.

Materialul este structurat în zece lucrări care respectă structura cursului de Rezistența Materialelor predat la Facultatea de Constucții și acoperă întreaga programă analitică.

Lucrarea, prin modul în care este concepută, urmărește să pună la dispoziția studenților un instrument de lucru util atât pentru studiul individual cât și în cadrul orelor de lucrări aplicative.

În acest scop, fiecare lucrare este structurată pe patru părți. Prima parte este o sinteză a noțiunilor teoretice ce vor fi utilizate în aplicații și se adresează studiului individual în vederea pregătirii studenților pentru lucrările aplicative.

Partea a doua oferă exemple de calcul detaliate pentru fiecare problemă de bază ("aplicații-tip"), ajutând astfel la înțelegerea algoritmilor și fixarea etapelor de calcul.

Partea a treia conține aplicații ("teme") care se adresează rezolvării individuale și sunt particularizate pe numere de ordine.

Ultima parte a fiecarei lucrări aduce un element de noutate prin introducerea testelor tip grilă pentru verificarea cunoștințelor dobândite.

*

Autoarea mulțumește pe această cale domnului Prof. Dr. Ing. Cornel Bia, precum și tuturor colegilor de la disciplina de Rezistența Materialelor pentru sprijinul acordat pe parcursul elaborării acestei lucrări.

De asemenea, autoarea va fi recunoscătoare tuturor celor care vor face observații și propuneri în vederea îmbunătățirii eventualelor noi ediții ale îndumătorului.

AUTOAREA

Cluj-Napoca, octombrie 1997

CUPRINS

Lucrarea 1: *Reazeme și reacțiuni*.....3

Lucrarea 2: *Eforturi într-o secțiune și diagrame de eforturi*.....17

Lucrarea 3: *Diagrame de eforturi. Principiul suprapunerii efectelor. Sisteme plane cu console și articulații* 28

***Lucrarea 4**: Încercarea la întindere și compresiune a oțelului de construcții* 46

Lucrarea 5: *Bare sudate solicitate axial* 54

Lucrarea 6: *Bare solicitate axial îmbinate cu nituri sau cu șuruburi* 80

Lucrarea 7: *Caracteristici geometrice ale figurilor plane*.....98

Lucrarea 8: *Încovoierea simplă a grinzilor* 112

Lucrarea 9: *Calculul deplasărilor grinzilor încovoiate prin metoda grinzii conjugate* 135

Lucrarea 10: *Torsiunea barelor drepte* 153

Răspunsuri la testele de verificare a cunoștințelor 167

Anexe 168

Lucrarea 1:

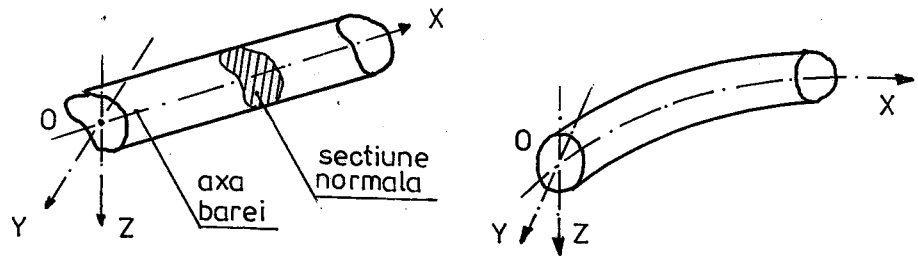
REAZEME ȘI REACȚIUNI

A.NOȚIUNI TEORETICE

1.Bare

Lucrările din prezentul îndrumător au ca obiect de studiu bara dreaptă plană. Marea majoritate a elementelor de construcții pot fi considerate bare. Din punct de vedere geometric, bara este un element spațial, caracterizat prin faptul că una din dimensiunile ei (lungimea) este mult mai mare decât celelalte două (dimensiunile secțiunii transversale).

Definim axa barei ca locul geometric al centrelor de greutate ale secțiunilor transversale. Dacă aceasta este o dreaptă plană, spunem că bara este dreaptă si plană; în caz contrar, bara este curbă (în plan sau în spațiu).



a) b)

Figura 1.1. Clasificarea barelor după forma axei: a) bară dreaptă plană; b) bară curbă plană.

Secțiunea normală într-un punct al barei reprezintă intersecția barei cu un plan care trece prin punctul respectiv și este perpendiculară pe tangenta la axa barei în acel punct (secțiune transversală normală).
În problemele Rezistenței Materialelor, barele vor fi reprezentate prin axa lor.

2. Încărcări exterioare

Acțiune = orice cauză capabilă să producă stări de solicitare mecanică într-un element de construcții.

Încărcări = schematizări ale acțiunilor exterioare (produc aceleași efecte):

- Sisteme de forțe;
- Sisteme de deplasări sau defomații impuse;
- Alte tipuri de interacțiuni cu mediul ambiant (variații de temperatură, etc.)

Sistemele de forțe care acționează asupra barelor pot fi schematizate, în baza principiului lui Barré de Saint-Venant, prin:

- Forțe și cupluri concentrate (acționează punctual);
- Forțe și cupluri distribuite pe o linie.

Reprezentarea grafică a acestor încărcări pe axa barei se numeste schemă de încărcare.

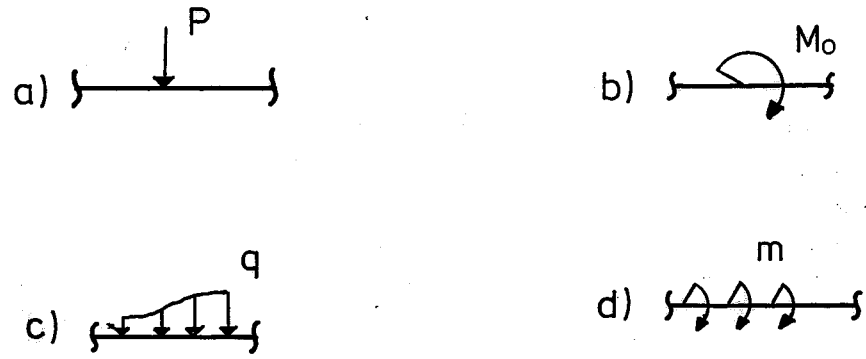


Figura 1.2. Tipuri de încărcări și reprezentarea lor: a) forță concentrată; b) cuplu concentrat; c) forță distribuită; d) cuplu distribuit.

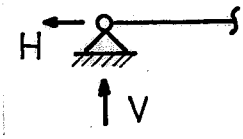
3. Tipuri de reazeme și reacțiuni

Reazemele sunt caracterizate prin deplasările pe care le împiedică; pe aceste direcții vor apare reacțiuni corespunzătoare.

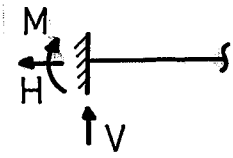
Reazemele utilizate în mod curent sunt:

- reazemul simplu
  - suprimă 1 grad de libertate;
  - reacțiunea: o forță concentrată pe direcția legăturii.

- articulația plană
  - suprimă 2 grade de libertate (2 translații în plan);
  - reacțiuni: 2 forțe ortogonale (pe direcțiile deplasărilor blocate) .



- încastrarea
  - suprimă 3 grade de libertate (ambele translații rotirea în plan);
  - reacțiuni: 2 forțe concentrate ortogonale și un moment.



Reazemele sunt considerate perfecte, fără frecări. Reacțiunile (forțele de legătură) reprezintă echivalentul mecanic al reazemului respectiv.

Bara dreaptă plană se consideră ca și corp în mișcare plană. Ea are deci 3 grade de libertate și, pentru asigurarea invariabilității poziției ei, sunt necesare 3 legături necoliniare. Barele cu astfel de legături se numesc *static determinate*. Dacă numărul legăturilor este mai mare decât 3, bara este *static nedeterminată*.

Tipuri de bare static determinate (figura 1.3):

- bara simplu rezemată (o articulație și un reazem simplu);
- consola (o încastrare).

Determinarea reacțiunilor la bare static determinate se face pornind de la considerația că, sub acțiunea încărcărilor exterioare și a reacțiunilor, corpul se află în repaus.

Se vor utiliza ecuațiile de echilibru ale Mecanicii teoretice în una din următoarele formulări:

(I): $\Sigma X=0$ (suma proiecțiilor tuturor forțelor, inclusiv reacțiuni, după axa barei este nulă);

$\Sigma M_A=0$ (suma momentelor tuturor forțelor, inclusiv reacțiuni, în raport cu punctul de reazem A este nulă);
$\Sigma M_B=0$ (idem, în raport cu punctul de reazem B).

sau

(II): $\Sigma X=0$; $\Sigma Z=0$; $\Sigma M_A=0$.

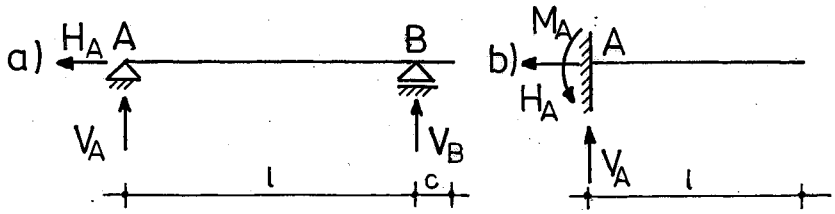


Figura 1.3. Bare static determinate: a) bara simplu rezemată; b) bara încastrată (consola).

Formularea (I) este convenabilă pentru bara simplu rezemată iar (II) este utilizată pentru consolă.

La barele static nedeterminate, ecuațiile de echilibru nu sunt suficiente pentru determinarea reacțiunilor; este necesară scrierea unor ecuații suplimentare de compatibilitate a deformațiilor.

B. EXEMPLE DE CALCUL

E1.1: Să se determine reacțiunile pentru bara simplu rezemată încărcată ca în figura 1.4.

Rezolvare:

- se introduc în reazeme reacțiunile corespunzătoare:

-în articulația din punctul A se introduce o reacțiune orizontală H_A si una verticală V_A ;

-în reazemul simplu din punctul B se introduce o reactiune verticală V_B .

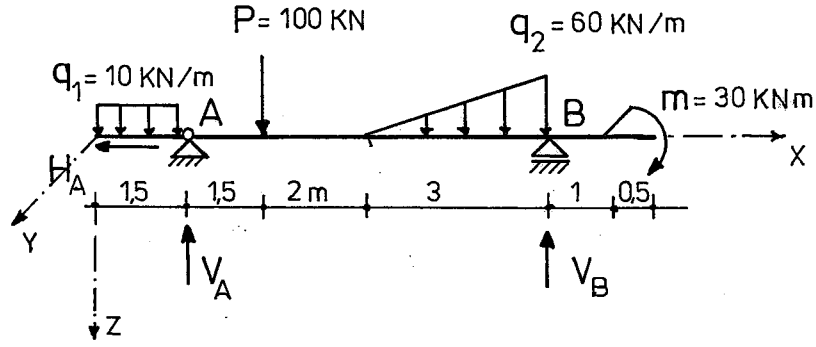


Figura 1.4.

- necunoscutele problemei sunt reactiunile H_A, V_A si V_B care se vor determina din ecuatiile de echilibru:
  $\Sigma X=0$ (1); $\Sigma M_A=0$ (2); $\Sigma M_B=0$ (3).

Observație: pentru calculul reacțiunilor, forțele distribuite pot fi înlocuite cu rezultantele lor, ca în figura 1.5:

a).forțe distribuite uniform b). forțe distribuite liniar

Figura 1.5. Rezultantele forțelor distribuite.

Ecuația (1) va da $H_A = 0$, deoarece nu există forțe orizontale sau forțe înclinate care să aibă proiecții nenule după axa Ox.

Observație: dacă bara nu este încărcată cu forțe orizontale sau înclinate, reactiunea orizontală va fi nulă și nu se mai reprezintă.

Ecuatiile (2) și (3) devin:
$\Sigma M_A=0$;

$$V_B(3+2+1,5)-30-\frac{1}{2}\cdot 60\cdot 3\left(\frac{2}{3}3+2+1,5\right)-100\cdot 1,5+10\cdot 1,5\frac{1,5}{2}=0.$$

V_B=102,12 kN .

$$\Sigma M_B=0;\ V_A(3+2+1{,}5)-10\cdot 1{,}5\cdot\left(\frac{1{,}5}{2}+1{,}5+2+3\right)-100\cdot(2+3)-\frac{1}{2}60\cdot 3\cdot\frac{1}{3}\cdot 3+30=0$$

V_A=102,88 kN

- Verificare: $\Sigma Z=0$ $\quad V_A + V_B - 10 \cdot 1{,}5 - 100 - \frac{1}{2}60 \cdot 3 = 0$

$102\ ,12 + 102\ ,88 = 205$

Răspuns: H_A=0; V_A=102,88 kN; V_B=102,12kN

E1.2: Să se determine reacțiunile pentru bara încastrată și încărcată ca în figura 1.6.

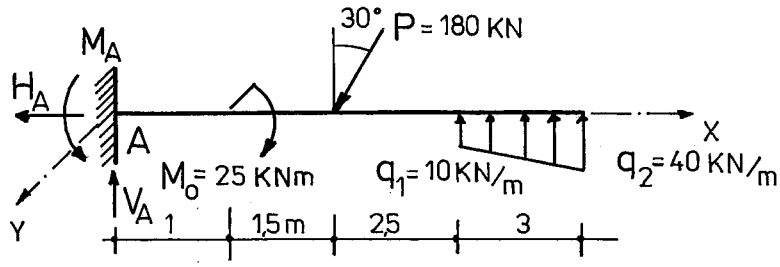


Figura 1.6.

Rezolvare:

- Se introduc în reazemul încastrat reacțiunile corespunzătoare:
  - -o forță orizontală H_A;
  - -o forță verticală V_A;
  - -un moment de încastrare M_A;
- Necunoscutele problemei sunt cele trei reacțiuni de mai sus care se vor determina din ecuatiile de echilibru:

$\Sigma X=0$ (1); $\Sigma Z=0$ (2); $\Sigma M_A=0$ (3).

Observații:

1). Forțele înclinate se vor descompune în două componente ortogonale orientate după axele Ox si Oz (figura 1.7).

2). Forțele distribuite trapezoidal se vor descompune în două sisteme de forțe distribuite: unul uniform si celălalt liniar (figura 1.8).

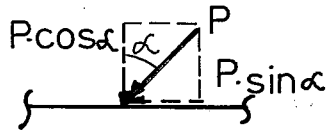


Figura 1.7. Componentele forțelor înclinate.

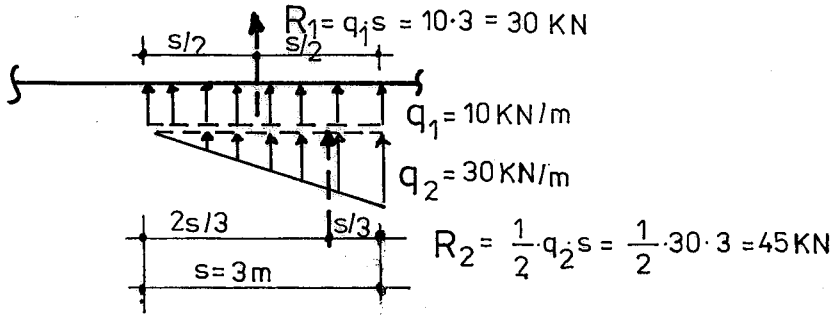


Figura 1.8. Descompunerea forțelor distribuite trapezoidal.

Ecuațiile de echilibru devin:

$\Sigma X=0;$ $\quad 180\cdot \sin 30°+H_A=0$

$H_A=-90$ kN

Observație: semnul minus arată că reacțiuea H_A are sens opus celui figurat în desen.

$\Sigma Z=0;$ $\quad V_A-180\cos 30+10\cdot 3+1/2\cdot 30\cdot 3=0$

$V_A=80{,}88$ kN ·

$\Sigma M_A=0;$ $\quad 1/2\cdot 30\cdot 3\cdot(1+1{,}5+2{,}5+1)+10\cdot 3\cdot(1+1{,}5+2{,}5+3/2)-$

$180\cdot\cos 30°\cdot(1+1{,}5)-25+M_A=0$

$M_A=-95{,}29$ kNm

Observație: proiecțiile după axa Ox ale forțelor nu dau momente, indiferent de secțiunea considerată, deoarece suportul lor trece prin punctul în raport cu care se scrie momentul.

Răspuns: H_A=90 kN; V_A=80,88kN; M_A=95,29 kNm.

C. TEMA LUCRĂRII

Să se determine reacțiunile barelor din figura 1.9.

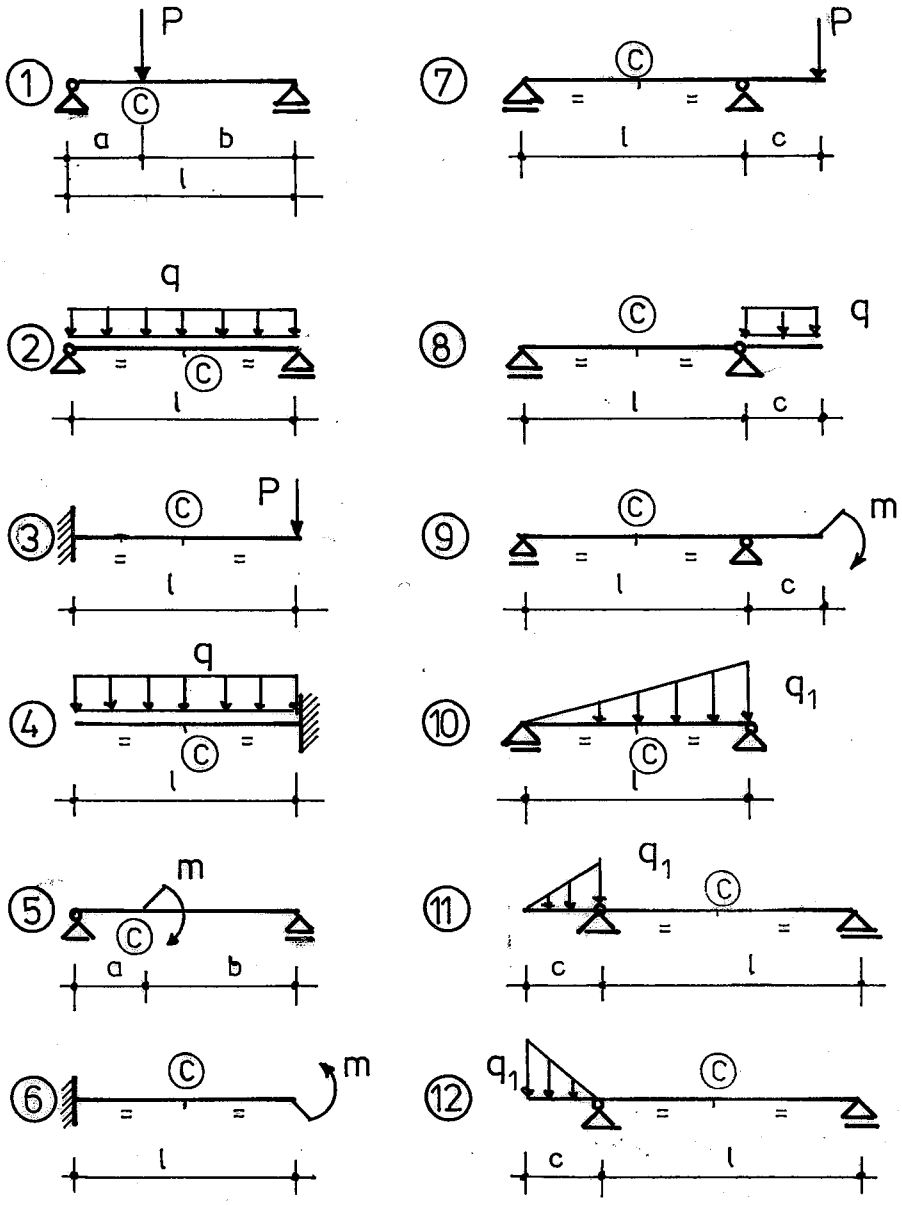


Figura 1.9.

Date numerice:

Tabelul 1.1.

grupa	P	Mo	q	q_1	l	a	c
1\A	50+n	80-2n	20+n	60-n	9,5-0,1n	0,2l	0,3l
1\B	40+2n	10+3n	15+n	50-n	9,0-0,1n	0,25l	0,3l
2\A	30+3n	50-n	10+n	30+n	8,0-0,1n	0,3l	0,3l
2\B	60-n	30+2n	45-n	40+n	7,5+0,1n	0,4l	0,3l
3\A	70-2n	40+n	35-n	30+2n	7,0+0,1n	0,3l	0,3l
3\B	90-3n	20+3n	40-n	50-n	6,0+0,1n	0,25l	0,3l
4\A	60+n	80-2n	20+n	60-n	9,0-0,1n	0,2l	0,3l
4\B	80-2n	50+n	40-n	50-n	7,0+0,1n	0,25l	0,3l

$b = l - a$; $\alpha = (20° + n)$.

*Observație: **n** reprezintă numărul de ordine al studentului în cadrul semigrupei.*

D. TEST DE VERIFICARE A CUNOȘTINȚELOR

1. Reacțiunile sunt:
   a).forțe de legătură;
   b).echivalentul mecanic al unui reazem;
   c).forțele care se opun tendinței de deplasare a corpului.

2. Pentru determinarea reacțiunilor unei bare simplu rezemate sunt necesare, în cazul încărcării cu forțe transversale, următoarele ecuații:
   a).două ecuații de moment;
   b).trei ecuații de echilibru;
   c).o ecuație de proiecții și una de moment.

3. Pentru determinarea reacțiunilor unei console sunt necesare, în cazul general de încărcare, următoarele ecuații:
   a).două ecuații de moment: în încastrare și în capătul liber;
   b).o ecuație de moment în încastrare și o ecuație de proiecții de forțe;
   c).două ecuații de proiecții și una de moment.

4. Este posibil să se determine reacțiunile unei console scriind două ecuații de proiecții si una de moment în capătul liber?

a).da;
b).nu.

5. Este posibil să se determine reacțiunile pentru bara static nedeterminată din figura 1.10 ?
   a).da;
   b).nu.

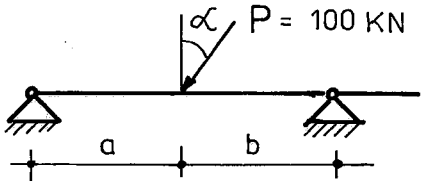


Figura 1.10.

6. Este posibil să se determine reacțiunile pentru bara static nedeterminată din figura 1.11 ?
   a).da;
   b).nu.

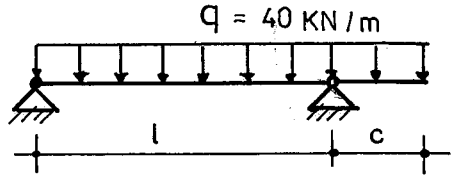


Figura 1.11.

7. Care dintre valorile de mai jos reprezintă reacțiunile barei simplu rezemate din figura 1.12 ?

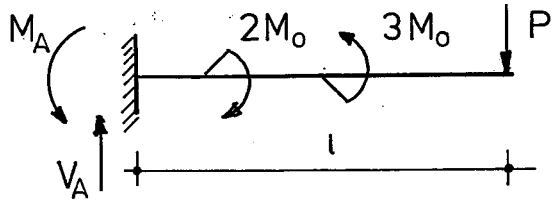


Figura 1.12.

a). $V_A = P$; $M_A = P \cdot l - M_0$;

b). $V_A = P$; $M_A = P \cdot l - 5M_0$;

c). $V_A = -P$; $M_A = M_0 - P \cdot l$.

5. Care dintre valorile de mai jos reprezintă reacțiunile barei simplu rezemate din figura 1.13 ?

a). $V_A = \frac{P}{2} + \frac{M_0}{l}$; $V_B = -\frac{P}{2} - \frac{M_0}{l}$;

b). $V_A = \frac{P}{2} - \frac{5M_0}{l}$; $V_B = \frac{P}{2} + \frac{5M_0}{l}$;

c). $V_A = \frac{P}{2} - \frac{M_0}{l}$; $V_B = \frac{P}{2} + \frac{M_0}{l}$.

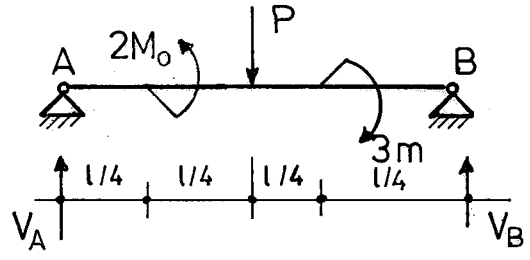


Figura 1.13.

6. Precizați dacă ecuația de echilibru de mai jos, scrisă în reazemul A al barei din figura 1.14 este corectă:

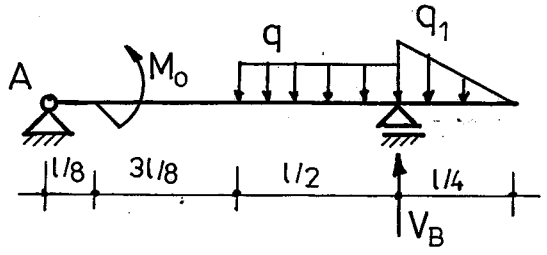


Figura 1.14.

$$V_B l - \frac{l}{2} q_1 \frac{l}{4}\left(l + \frac{1}{3}\frac{l}{4}\right) - q\frac{l}{2}\left(\frac{l}{2} + \frac{1}{2}\frac{l}{2}\right) - M_0 = 0$$

a).da;
b).nu.

8. Precizati dacă ecuația de echilibru de mai jos, scrisă în reazemul B al barei din figura 1.15 este corectă:

$$Pl - 5M_0 - \frac{1}{2} q_1 \frac{1}{3} l = M_B$$

a).da;
b).nu.

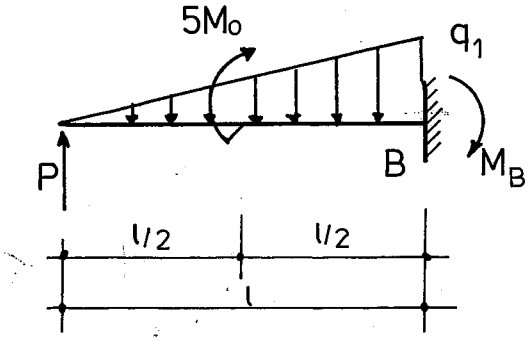


Figura 1.15.

9. Se dă bara din figura 1.16. Care este greșeala în relația de mai jos?

$$\sum M_B = 0; \quad V_A \cdot 4a - 4qa \cdot 2a - 2P \cdot 3a - Pa - qa\frac{a}{2} - M_0 = 0$$

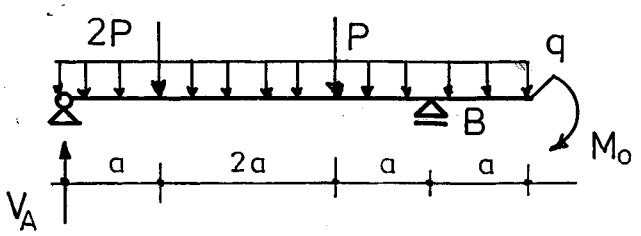


Figura 1.16.

a).este greșit semnul termenului: $(V_A \cdot 4a)$;

b).este greșit semnul termenilor: $(-qa\frac{a}{2})$ și $(-M_o)$;

c).este greșit semnul termenilor : $(-4qa \cdot 2a)$, $(-2P \cdot 3a)$ și $(-Pa)$.

7. Cât trebuie să fie forta P astfel încât momentul în încastrare al barei din figura 1.17 să fie nul?

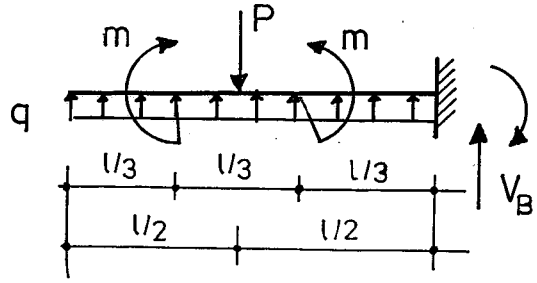


Figura 1.17.

a). $P = ql$;

b). $P = \frac{ql^2 - 2M_0}{l}$;

c). $P = \frac{ql}{2}$.

8. Se dă bara din figura 1.18. Care este greșeala în relația de mai jos?

$$\sum M_B = 0; \quad V_A l - q\frac{l}{3}\left(2\frac{l}{3}+\frac{l}{2}\right)+M_0+q_1\frac{l}{3}\left(\frac{1}{3}\frac{l}{3}\right)=0.$$

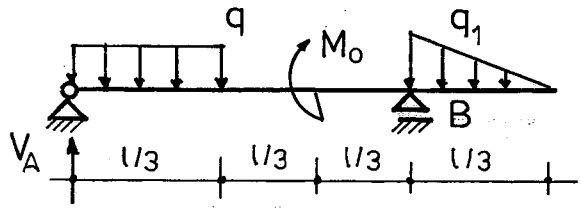


Figura 1.18.

a).este greșit semnul momentului M_0;

b).este greșit brațul forței în termenul: $-q\frac{l}{3}\left(2\frac{l}{3}+\frac{l}{2}\right)$;

c).este greșit brațul forței în termenul: $q_1\frac{l}{3}\left(\frac{1}{3}\frac{l}{3}\right)$.

10. Bara din figura 1.19 este static determinată?
a).da;
b).nu.

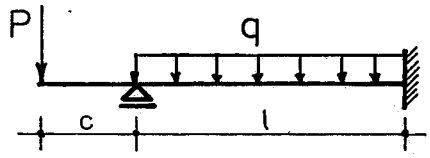
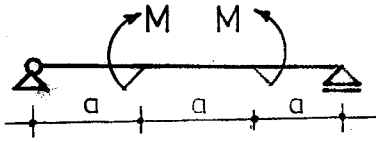


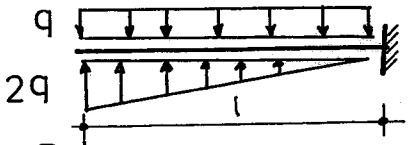
Figura 1.19.

11. În care dintre situațiile de mai jos reacțiunile vor fi nule?

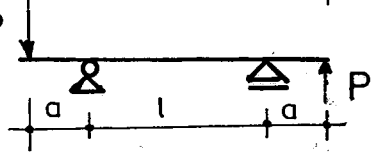
a).



b).



c).



Lucrarea 2:

EFORTURI ÎNTR-O SECȚIUNE ȘI DIAGRAME DE EFORTURI

A.NOȚIUNI TEORETICE

1.Eforturi

Se numesc **eforturi secționale** componentele torsorului obținut prin reducerea tensiunilor de pe întraga secțiune în raport cu centrul ei de masă.

În cazul general, la reducerea tensiunilor normale σ, se obțin trei eforturi (o forță concentrată și două momente), după cum urmează:

- $N = \int_A \sigma_x dA$, forță axială (orientată după axa Ox);
- $M_y = \int_A \sigma_x y \cdot dA$, moment încovoietor ;
  (secțiunea este rotită în jurul axei Oy);
- $M_z = \int_A \sigma_x z \cdot dA$, moment încovoietor ;
  (sectiunea este rotită în jurul axei Oz).

La reducerea tensiunilor tangențiale τ, se obțin alte trei eforturi (două forțe concentrate și un moment), după cum urmează:

- $T_y = \int_A \tau_{xy} \cdot dA$, forță tăietoare (orientată după axa Oy);
- $T_z = \int_A \tau_{xz} \cdot dA$, forță tăietoare (orientată după axa Oz);
- $M_t = \int_A \left(\tau_{xz} y - \tau_{xy} z\right) \cdot dA$, moment de torsiune
  (secțiunea este rotită în jurul axei Ox).

În total apar, în cazul cel mai general de încărcare al barelor, șase eforturi: trei forțe (orientate după fiecare din cele trei axe de coordonate) și trei momente (care rotesc sectiunea în jurul acelorași trei axe).

În cazul barelor drepte acționate de forțe aflate în planul lor, se obțin numai trei din cele șase eforturi secționale (N, T = T_z și M = M_y).

Calculul eforturilor și convenția de semne:

Determinarea eforturilor se face prin *metoda secțiunilor.* Sensul pozitiv pe cele două fețe ale secțiunii și modul de calcul sunt sintetizate în Tabelul 2.1.

Prima operațiune, înaintea determinării eforturilor într-o secțiune, constă în calculul reacțiunilor.

Exemplu: Să se calculeze eforturile în secțiunea K a barei din figura 2.1.

1. Se determină reacțiunile barei (vezi Lucrarea 1) : V_A=102,9 kN si V_B=102,1 kN.

2. Se secționează bara cu un plan perpendicular pe axa barei în punctul K; rezultă astfel două tronsoane.

3. Se îndepărtează una din părți (de exemplu stânga-ST). Pentru ca partea rămasă (dreapta-DR) să fie în echilibru, pe fața acesteia trebuie introdusă acțiunea părții înlăturate, adică un sistem de forțe static echivalent cu cel al forțelor de pe tronsonul înlăturat.

4. Sistemul de forțe de pe tronsonul înlăturat (acțiuni + reacțiuni) se reduce în centrul de masă al sectiunii K și rezultă:
   - o forță axială N_K (tangentă la axa barei);
   - o forță tăietoare T_K (normală la axa barei);
   - un moment încovoietor M_K

$$N_K = \sum_{ST} X = 0;$$

$$T_K = \sum_{ST} Z = -10 \cdot 1{,}5 + 102{,}9 - 100 = -12{,}1 \text{ kN};$$

$$M_K = \sum_{ST} M =$$

$$= -10 \cdot 1{,}5\left(\frac{1{,}5}{2} + 1{,}5 + 1\right) + 102{,}9(1{,}5 + 1) - 100 \cdot 1 = +108{,}5 \text{ kNm}.$$

Eforturile secționale obținute respectă regula de semne din Tabelul 2.1.

Observație.:

- *În secțiunile unde actionează o forță concentrată, aceasta va fi luată în calcul pe fața din dreapta ($T_{DR} = P + T_{ST}$).*
- *În secțiunile unde acționează un moment concentrat M_0, acesta va fi luat în calcul pe fața din dreapta ($M_{DR} = M_0 + M_{ST}$).*

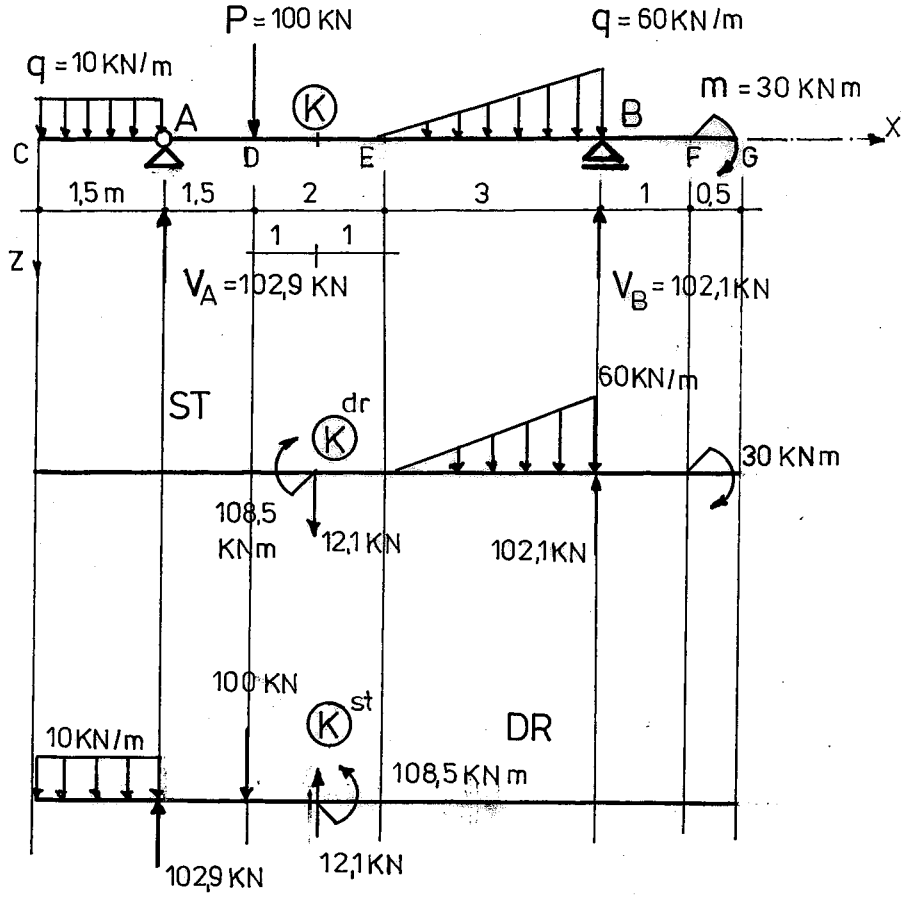


Figura 2.1.

2. Diagrame de eforturi

Poziția unei secțiuni transversale pe axa barei se definește prin mărimea coordonatei x (abscisa), măsurată din originea barei. În cele ce urmează, originea barei se va considera întotdeauna în capătul ei din stânga.

Valoarea eforturilor depinde de poziția secțiunii; astfel eforturile secționale pot fi privite ca și funcții de variabila x.

Se numește **diagramă de variație a unui efort** reprezentarea grafică a valorilor acestuia funcție de poziția secțiunii; altfel spus, diagramele de eforturi sunt graficele funcțiilor N(x), T(x) și M(x).

Tabelul 2.1: Convenția de semne pentru eforturi.

EFORTUL	SENSUL POZITIV	CUM SE CALCULEAZĂ
N - forță axială	"trage" de secțiune	N=Σ proiecțiilor după axa barei (Ox) a tuturor forțelor (încărcări+reacțiuni) de pe tronsonul înlăturat.
T – forță tăietoare	rotește partea în sens orar	T=Σ proiecțiilor după normala la axa barei (Oz) a tuturor forțelor (încărcări+reacțiuni) de pe tronsonul înlăturat.
M –moment încovoietor	"trage" de fibra inferioară a secțiunii	M=Σ momentelor în raport cu centrul de masă al secțiunii a tuturor forțelor (încărcări+reacțiuni) de pe tronsonul înlăturat.

Trasarea diagramelor de eforturi se poate face în două moduri:

- *analitic*: se determină expresiile algebrice ale funcțiilor N(x), T(x), M(x) și se trasează graficele acestora folosind metodele analizei matematice;
- *direct*: se utilizează relațiile diferențiale între încărcări și eforturi și consecințele acestora (vezi Tabelul 2.2 și 2.3).

Convenția de reprezentare:

- pentru T si N – ordonatele pozitive se reprezintă deasupra liniei de referință;
- pentru M - ordonatele pozitive se reprezintă dedesubtul liniei de referință.

Relațiile diferențiale între încărcări și eforturi și consecintele lor:

$$\frac{dN}{dx} = -p \ (1) \ ; \quad \frac{dT}{dx} = -q \ (2) \ ; \quad \frac{dM}{dx} = T \ (3) \ ; \quad \frac{d^2M}{dx^2} = -q \ (4) \ ,$$

unde p reprezintă o forță distribuită axial și q una distribuită transversal.

Consecințele relațiilor (1) și (2) sunt identice, de aceea în continuare se va trata pe larg numai relatia (2). Cele mai importante rezultate sunt sintetizate în Tabelul 2.2.

Consecințele relații (3) sunt reprezentate sintetic în Tabelul 2.3.

B. EXEMPLE DE CALCUL

E 2.1: Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara simplu rezemată din figura 2.2.

Rezolvare:

Pentru calculul reactiunilor se va revedea Lucrarea 1 (E1.1).
Forțele tăietoare în sectiunile caracteristice:

$$T_C = 0 \ ;$$

$$T_A^{st} = -10 \cdot 1{,}5 = -15 \text{ kN}; \quad T_A^{dr} = T_A^{st} + V_A = -15 + 102{,}9 = 87{,}9 \text{ kN};$$

$$T_D^{st} = T_A^{dr} = 87{,}5 \text{ kN}; \quad T_D^{dr} = T_D^{st} - P = 87{,}5 - 100 = -12{,}1 \text{ kN};$$

$$T_E = T_d^{dr} = -12{,}1 \text{ kN};$$

$$T_B^{st} = T_E - \frac{1}{2} 60 \cdot 3 = -12{,}1 - 90 = -102{,}1 \text{ kN};$$

$$T_B^{dr} = T_B^{st} + V_B = -102{,}1 + 102{,}1 = 0 \, .$$

Tabelul 2.2: Consecințele relației diferențiale (2) între încărcarea transversală p și forța tăietoare T.

p	p >0	p <0	p = 0	polinom de grad *n*	constant	liniar	P	M_0
T	↓	↑	constant	polinom de grad *n+1*	liniar	parabolă de gradul II	salt egal cu P	--

Tabelul 2.3:Consecințele relației diferențiale (3), între forța tăietoare T și momentul încovoietor M.

T	T>0	T<0	T = 0		Polinom de grad k	constant	liniar	P	M_0
			Pe interval	În punct					
M	↑	↓	Const	Max. ------ minim	Polinom de grad k+1	liniar	Parabolă gradul II	Schimbare de pantă	Salt egal cu M_0

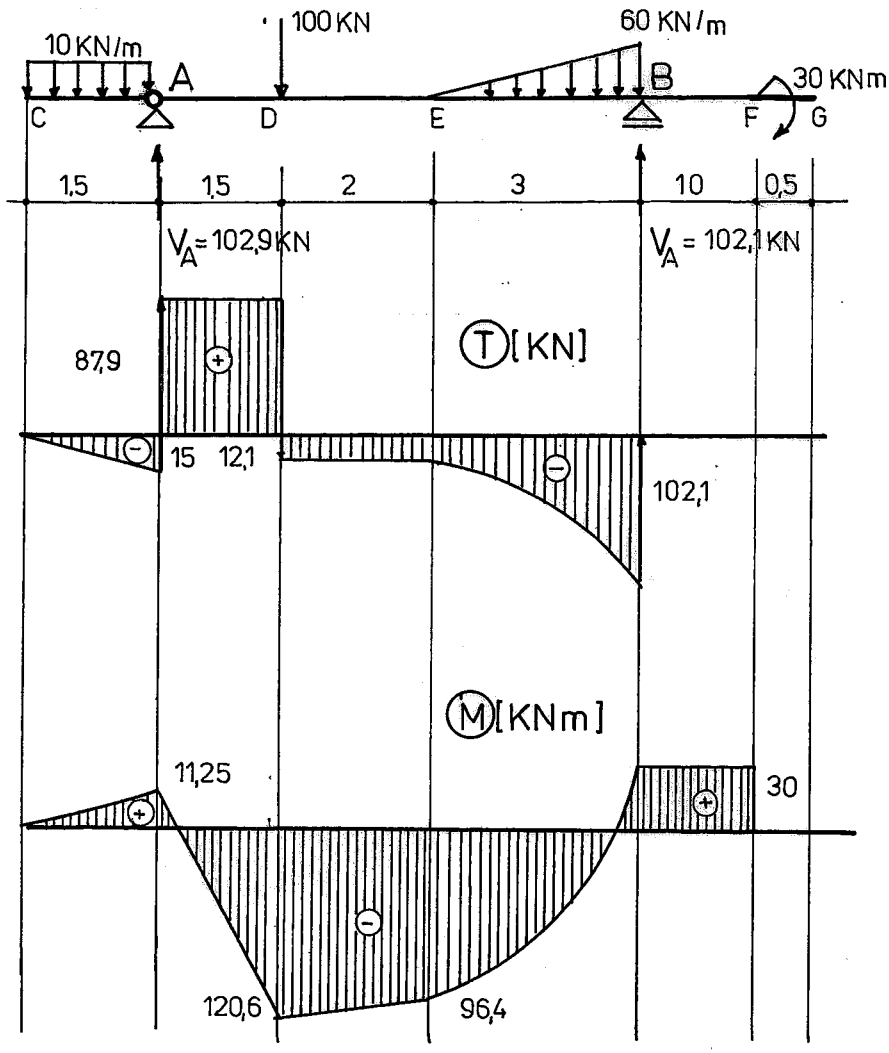


Figura 2.2.

Momentele încovoietoare în sectiunile caracteristice:

$$M_C = 0\,; \quad M_A = -10 \cdot 1{,}5 \cdot \frac{1{,}5}{2} = -11{,}25\ \text{kNm};$$

$$M_D = -10 \cdot 1{,}5 \cdot \left(\frac{1{,}5}{2} + 1{,}5\right) + V_A \cdot 1{,}5 = 120{,}6\ \text{kNm}\,;$$

$$M_E = -10 \cdot 15\left(\frac{1,5}{2} + 3,5\right) + V_A \cdot 3,5 - 100 \cdot 2 = 96,4 \text{ kNm};$$

$$M_G = 0; \quad M_F^{dr} = 0; \quad M_F^{sr} = M_F^{dr} - 30 = -30 \text{ kNm};$$

$$M_B = -30 \text{ kNm}.$$

Pe intervalul C-A există forțe distribuite uniform q >0, deci forța tăietoare T va avea o variație liniară iar momentul încovoietor M va fi o parabolă de gradul II.

Pe intervalele A-D si D-E nu există forțe distribuite; în consecință T va fi constant si M va fi liniar.

Pe intervalul E-B există forțe distribuite liniar; T va avea diagrama pe acest interval o parabolă de gradul II iar M va fi o parabolă de gradul III.

În fine, pe consola din dreapta, T este zero: momentul este constant pe acest interval, având un salt în secțiunea unde acționează cuplul concentrat.

În secțiunile A, D și B, unde acționează forțe concentrate, în diagrama de forță tăietoare se produc salturi egale cu valoarea forței care acționează în secțiune; în diagrama de momente încovoietoare, corespunzător acestor secțiuni, are loc o schimbare de pantă.

Diagramele de eforturi T și M sunt prezentate în figura 2.2.

E 2.2: Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara încastrată din figura 2.3, știind că unghiul $\alpha = 30°$.

Rezolvare:

Pe consolă, digramele de eforturi se pot trasa și fără calculul reacțiunilor; acestea vor rezulta din condiția de "închidere" pe linia de referință a diagramelor.

Forțele axiale în secțiunile caracteristice sunt:

$N_A = -100 \cdot \sin 30° = -100 \cdot 0,5 = -50$ kN (compresiune).

Nemaiexistând alte forțe sau componente axiale, diagrama N va fi constantă pe toată lungimea barei. Din condiția ca diagrama N să se închidă pe linia de referință (condiție echivalentă cu ecuația de echilibru după direcția axei barei) rezultă:

$H_A = 50$ kN (compresiune).

Forțele tăietoare în secțiunile caracteristice sunt:

$T_A = 100 \cdot \cos 30° = 100 \cdot 0,866 = 86,6$ kN; $\quad T_C = T_A$;

$$T_D = T_C - \frac{1}{2} 90 \cdot 3 = 86,6 - 135 = -48,4 \text{ kN};$$

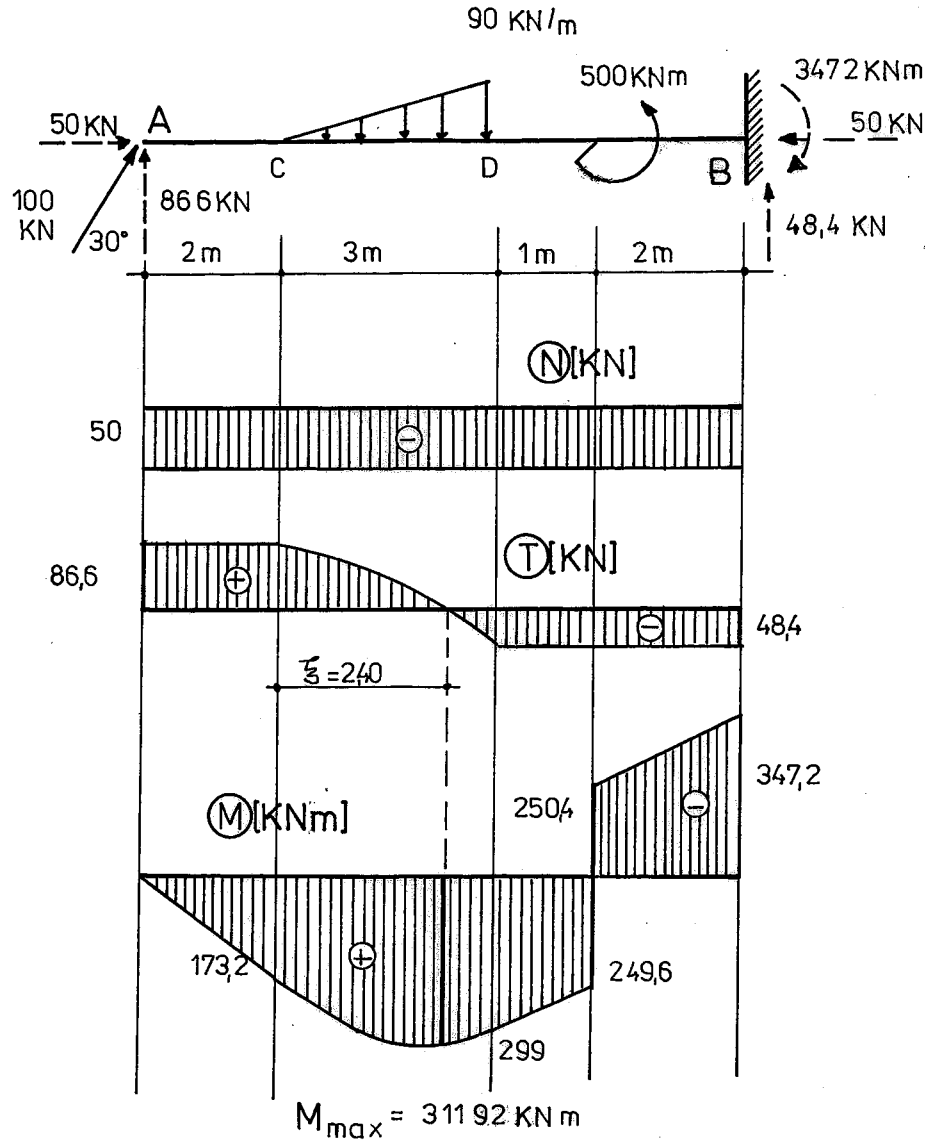


Figura 2.3.

Pe intrvalul A-C, diagrama T este constantă; pe intervalul C-D avem forțe distribuite liniar, deci T va fi o parabolă de gradul II. Pe intervalul D-B nu există forțe distribuite, deci T va fi din nou constant; din conditia ca

diagrama T să se închidă pe linia de referință (conditie echivalentă cu ecuația de echilibru după direcția Oz) rezultă:

$$V_B = 48{,}8\,\text{kN}.$$

Momentele încovoietoare în secțiunile caracteristice:

$$M_A = 0\,;\, M_C = 86{,}6 \cdot 2 = 173{,}2\,\text{kNm};$$

$$M_D = 86{,}6 \cdot 5 - \frac{1}{2} 90 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 299\,\text{kNm};$$

$$M_E^{st} = 86{,}6 \cdot 6 - \frac{1}{2} 90 \cdot 3 \left(\frac{3}{2} + 1 \right) = 249{,}6\,\text{kNm};$$

$$M_E^{dr} = M_E^{st} - 500 = 249{,}6 - 500 = -250{,}4\,\text{kNm}.$$

Momentul este liniar pe intervalul A-C și D-E (unde T este constant) și are un salt în secțiunea E unde acționează momentul concentrat. Pe intervalul C-D variația momentului urmează o parabolă de gradul III și atinge un punct de extrem în secțiunea unde se anulează forța tăietoare T.

$$T(x_0) = 86{,}6 - \frac{1}{2} \frac{90}{3} \xi \cdot \xi = 0\,; \qquad \xi = 2{,}40\,\text{m}.$$

$$M(x_0) = M_{max} = 86{,}6 \cdot 4{,}40 - \frac{1}{2} \cdot \frac{90}{3} \cdot (2{,}40)^2 \cdot \frac{1}{3} 2{,}40 = 311{,}9\,\text{kNm}.$$

Momentul în încastrare (egal și de semn contrar cu reactiunea) este:

$$M_B = 86{,}6 \cdot 9 - \frac{1}{2} 90 \cdot 3 \cdot 4 - 500 = -347{,}2\,\text{kNm}.$$

Diagramele de eforturi sunt reprezentate în figura 2.3.

C. TEMA LUCRĂRII

I. Să se determine diagramele de eforturi pentru barele din Lucrarea 1.

II. Să se traseze diagramele de eforturi pentru barele din figura 2.4. Datele numerice se vor lua din Lucrarea 1.

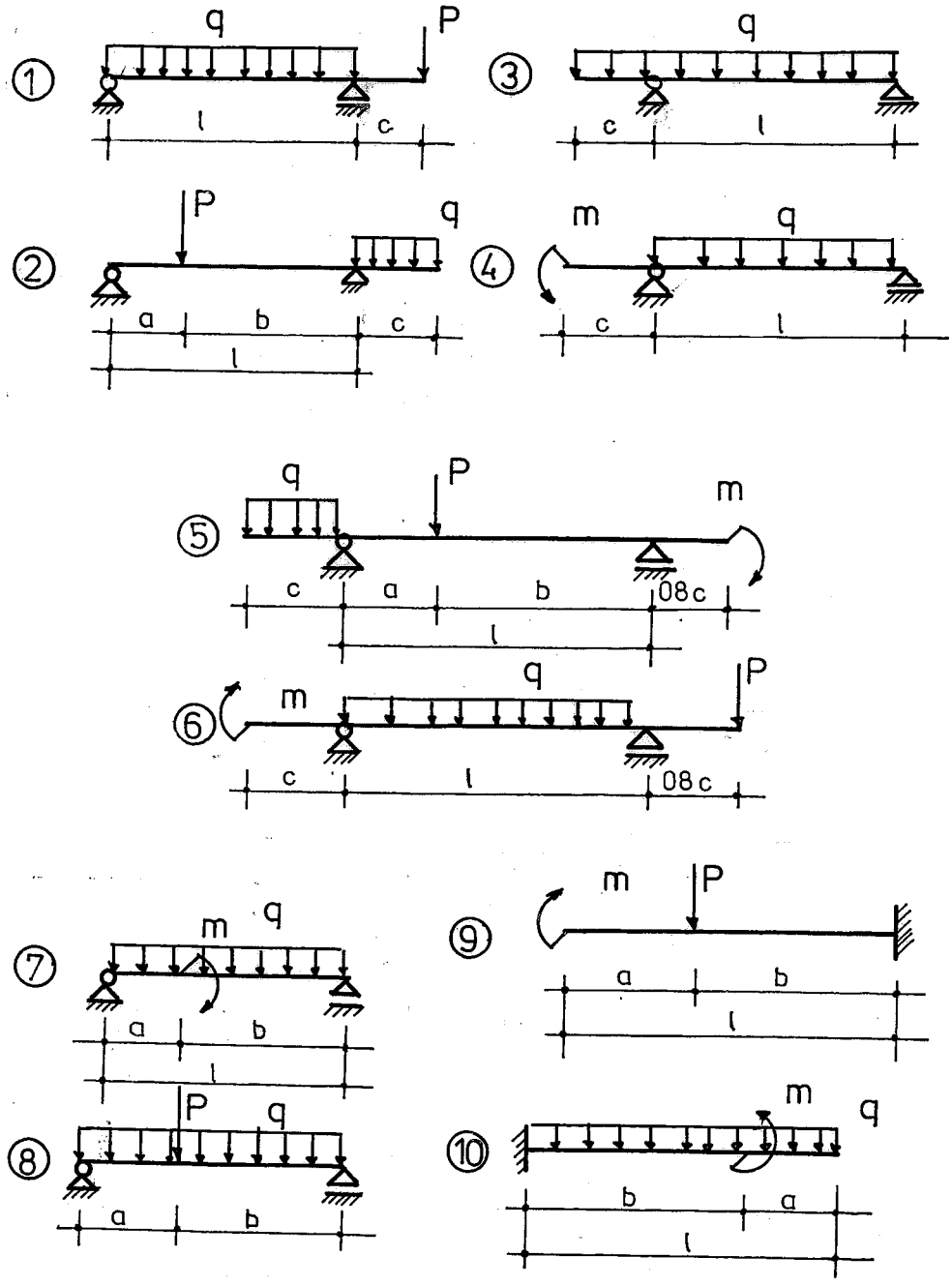

①
q
P
l
c
②
P
q
a
b
c
l
③
q
c
l
④
m
q
c
l
⑤
q
P
m
c
a
b
0,8c
l
⑥
m
q
P
c
l
0,8c
⑦
m
q
a
b
l
⑧
P
q
a
b
⑨
m
P
a
b
l
⑩
m
q
b
a
l

Figura 2.4.

Lucrarea 3:

DIAGRAME DE EFORTURI: PRINCIPIUL SUPRAPUNERII EFECTELOR. SISTEME PLANE CU CONSOLE ȘI ARTICULAȚII

A.NOȚIUNI TEORETICE

1.Principiul suprapunerii efectelor

Problemele Rezistenței materialelor sunt liniare atât din punct de vedere geometric (liniaritatea geometrică este asigurată de ipoteza micilor deformații), cât și din punct de vedere fizic (liniaritatea fizică fiind exprimată prin legea lui Hooke: $\sigma = E\varepsilon$). Aceasta permite aplicarea principiului suprapunerii efectelor, simplificând mult rezolvarea anumitor categorii de probleme.

Astfel, trasarea diagramelor de eforturi finale se poate face trasând diagramele de eforturi din fiecare încărcare simplă (încărcare simplă = o singură forță pe bară) și apoi suprapunându-le prin adunarea algebrică a valorilor corespunzătoare în fiecare secțiune caracteristică. Modul de variatie al diagramei între două secțiuni caracteristice va fi corelat cu încărcarea totală de pe bară.

Pentru trasarea diagramelor simple se va revedea Lucrarea 1.

2. Sisteme plane cu console si articulatii

Un asemenea sistem – numit și *grindă Gerber* - este compus din bare legate între ele prin articulații interioare și fixate exterior prin reazeme simple, articulații sau încastrări. Sistemul, în ansamblu, este static determinat, adică:

$$n = (L_{ext} + 2 \cdot A_{int}) - 3 \cdot C = 0,$$

unde: L_{ext} =numărul de legături exterioare (reazeme simple, articulații și încastrări);

A_{int} =numărul de articulații interioare(fiecare având câte două grade de libertate);

C = numărul de bare (fiecare având trei grade de libertate).

Un astfel de sistem se abordează astfel:

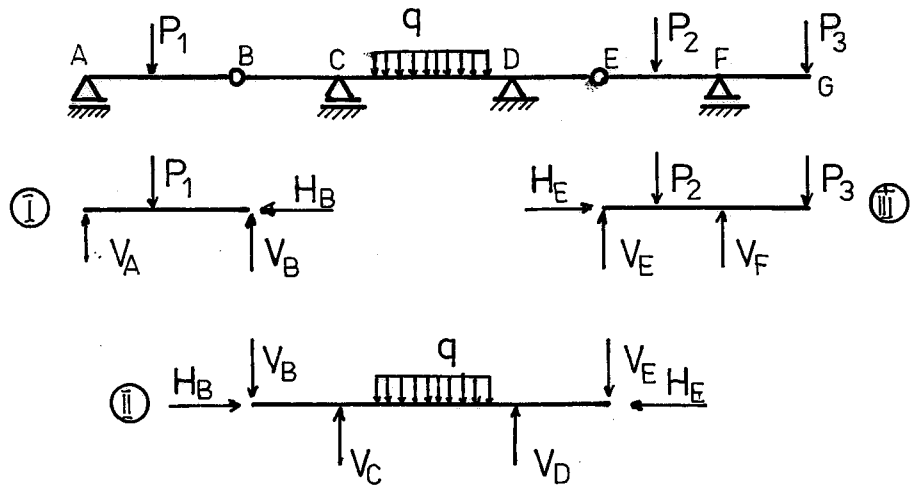


Figura 3.1: Sistem plan cu console și articulații (grindă Gerber).

- Se desfac articulațiile interioare; sistemul este astfel seperat în barele componente. Pe capetele barelor astfel obținute, în locul articulațiilor desfăcute, se introduc reacțiuni, egale și cu semne contrare (așa cum se vede în figura 3.1).

- Sistemul astfel desfăcut, încărcat cu forțele exterioare date și reacțiunile necunoscute din articulațiile interioare desfăcute, conține două tipuri de bare:
  - *bare independente* (bara II), ale căror reacțiuni pot fi determinate din ecuațiile de echilibru proprii barei respective;
  - *bare fundamentale* (barele I și III) , care își transmit singure forțele la teren; recțiunile lor nu se pot determina decât după calculul reacțiunilor barelor independente.

- Calculul începe de la părțile independente:
  - Se determină reacțiunile barelor independente (din forțele exterioare care acționează bara);
  - Aceste reacțiuni devin încărcări pentru barele fundamentale (împreună cu forțele exterioare care le solicită);
  - Se pot determina acum reacțiunile barelor fundamentale.

  Observație: forțele exterioare de pe barele fundamentale nu produc eforturi în barele independente.

- Trasarea diagramelor se face pentru fiecare bară, respectând regulile de la lucrările precedente. Diagramele finale se obțin prin alipirea dia-

diagramelor de eforturi de pe barele sistemului.

Observație: În articulațiile interioare, momentele încovoietoare sunt zero (cu excepția cazului când articulația interioară este încărcată cu un cuplu concentrat).

B. EXEMPLE DE CALCUL

E 3.1: Să se traseze diagramele de eforturi pentru bara simplu rezemată, încărcată ca în figură, aplicând principiul suprapunerii efectelor.

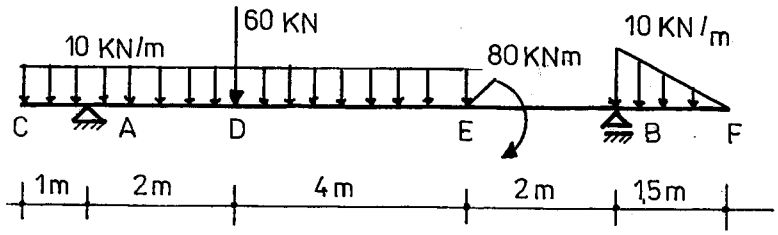


Figura 3.2.

Rezolvare:

Se vor considera, pe rând, următoarele încărcări simple:

- Forță uniform distribuită pe consolă:

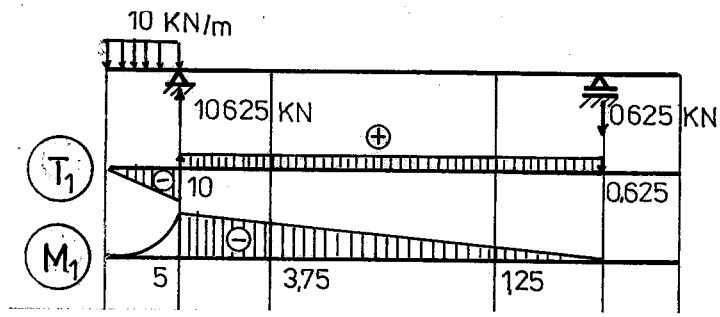


Figura 3.3.

- Forță uniform distribuită pe deschidere:

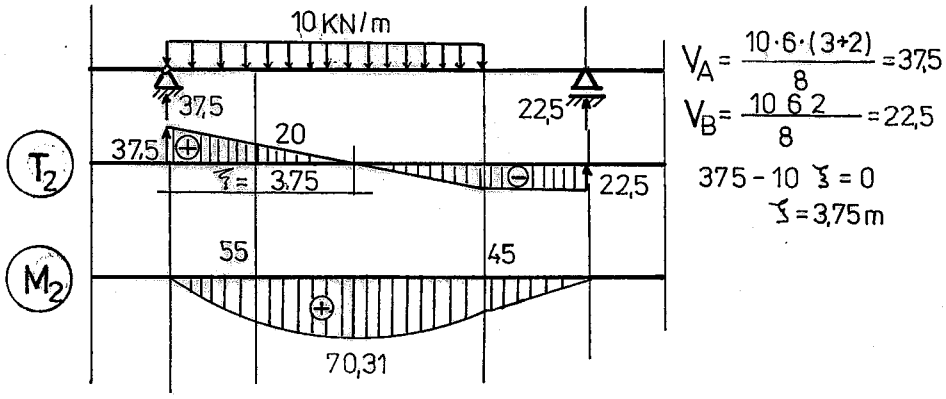


Figura 3.4.

- Forță concentrată:

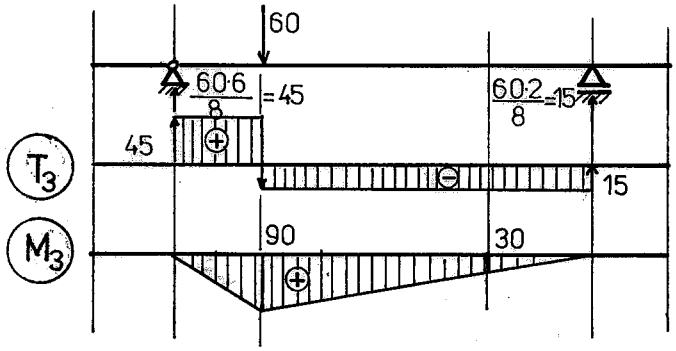


Figura 3.5.

- Cuplu concentrat:

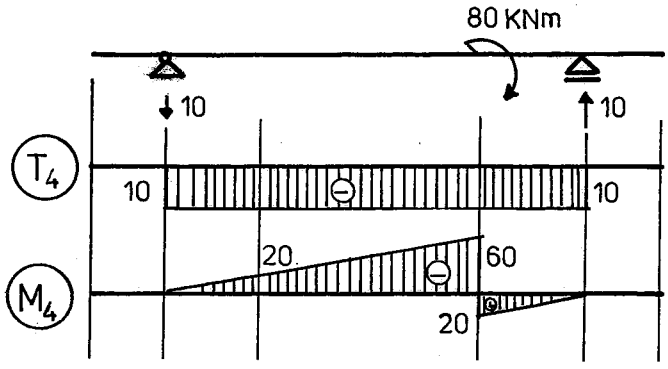


Figura 3.6.

- Forță distribuită liniar pe consolă:

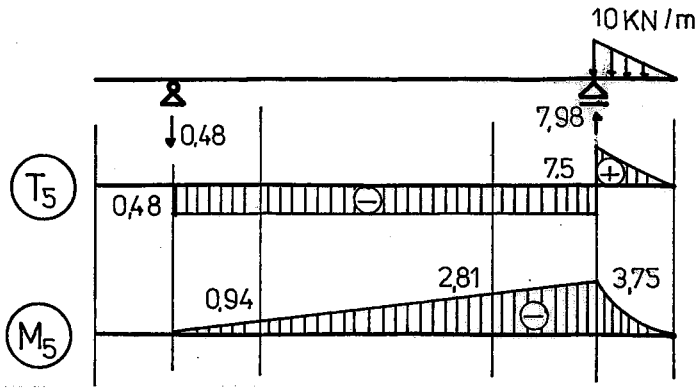


Figura 3.7.

Diagramele finale sunt reprezentate în figura 3.8. Ele sunt obținute prin adunarea algebrică a valorilor eforturilor corespunzătoare secțiunilor caracteristice.

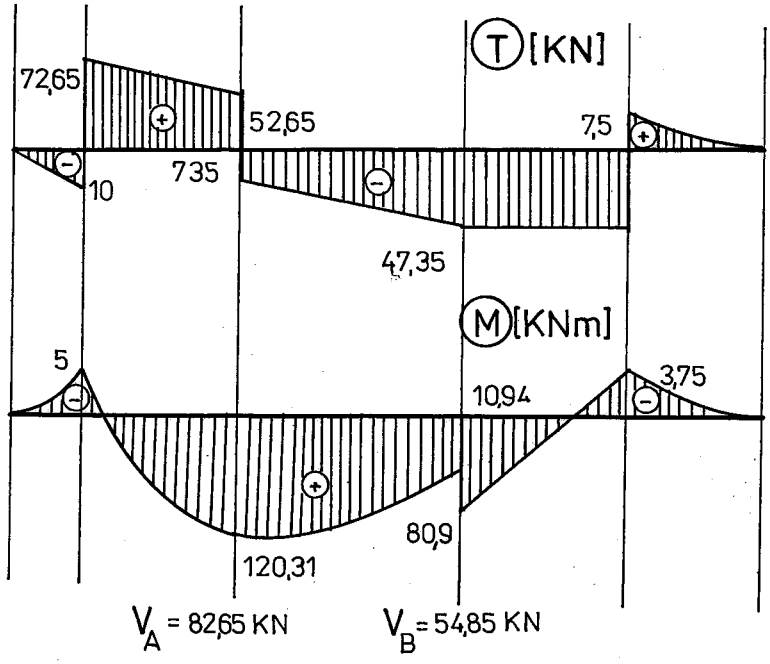


Figura 3.8.

E 3.2: Verificați gradul de nedeterminare statică al sistemului de bare din figură și trasați diagramele de eforturi pentru bara cu console și articulații din figura 3.9,a.

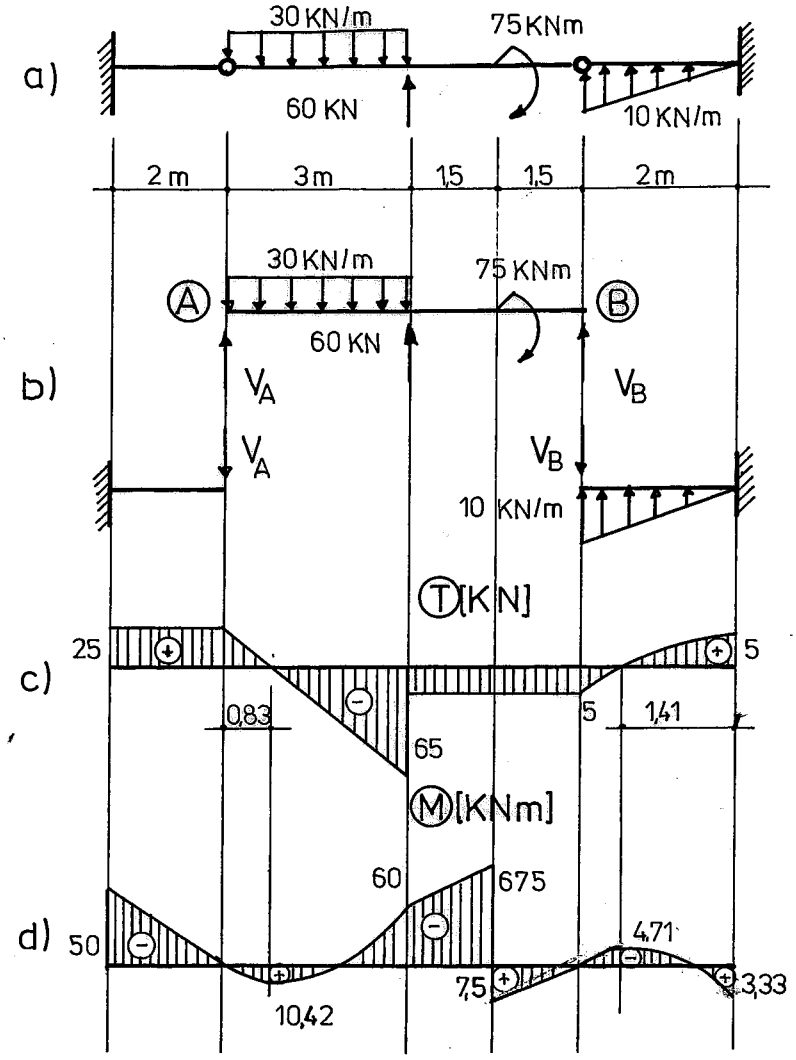


Figura 3.9.

Rezolvare:

- Se desfac articulațiile interioare, se înlocuiesc cu reacțiunile corespunzătoare și se obține astfel sistemul de bare din figura 3.9,b.

- Se începe cu calculul reacțiunilor barei independente A – B:

$$\sum M_A = 0;\ 6V_B - 75 + 60 \cdot 3 - 30 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 0;\qquad V_B = 5\,\text{kN}.$$

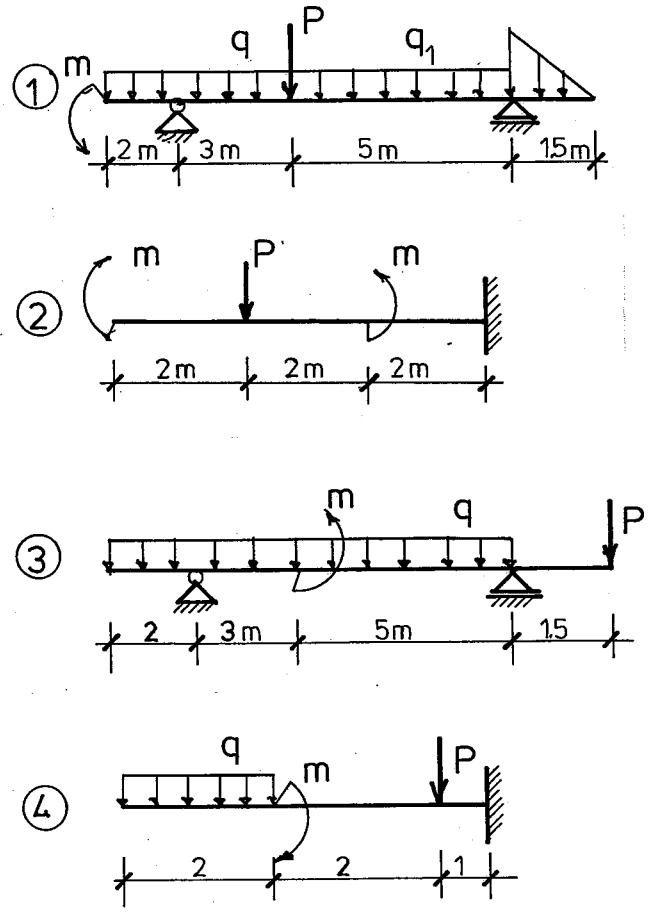
$$\sum M_B = 0;\ -30 \cdot 3 \cdot 4{,}5 + 60 \cdot 3 + 75 + 6V_A = 0;\quad V_A = 25\,\text{kN}.$$

- Se încarcă barele fundamentale cu reacțiunile corespunzătoare, determinate mai sus și se trasează direct diagramele de eforturi (figura 3.9,c și d).

C. TEMA LUCRĂRII

I. Să se traseze, folosind principiul suprapunerii efectelor, diagramele de eforturi pentru barele 2 și 10 din Lucrarea 2 (figura 2.4).

II.Să se traseze, prin metoda directă, diagramele de eforturi pentru barele din figura 3.10. Datele numerice se vor lua din Lucrarea 1.



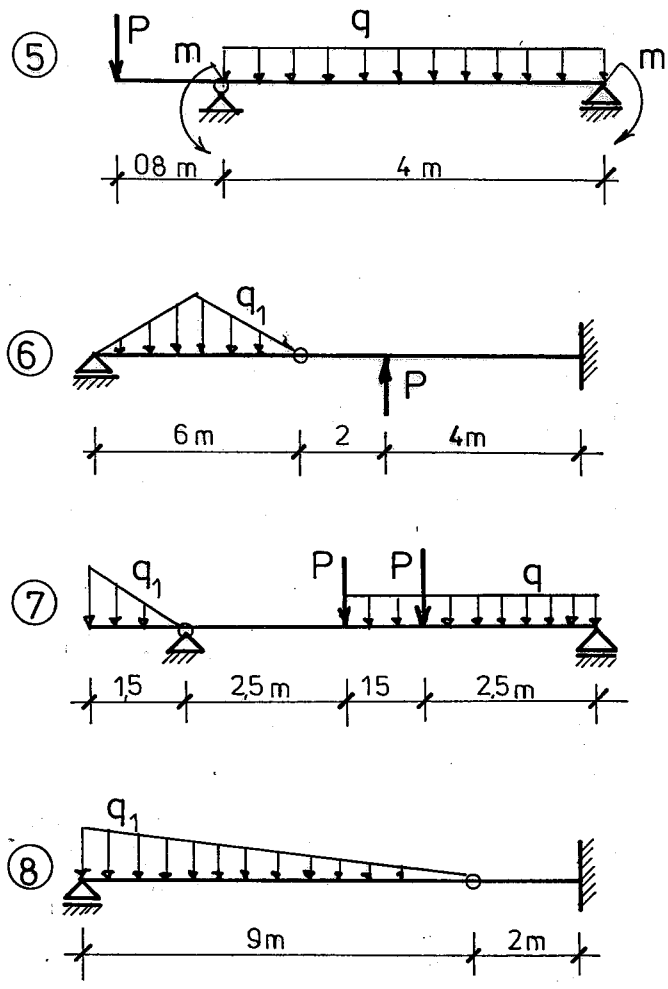


Figura 3.10.

D. TEST DE VERIFICARE A CUNOȘTINȚELOR

1. Efortul elementar este:
   a).componentă a torsorului obținut prin reducerea forțelor exterioare în centrul de greutate al secțiunii;
   b).rezultanta componentelor tensiunilor de pe elementul de arie;
   c).rezultanta componentelor tensiunilor de pe secțiunea transversală.

2. Într-un punct curent al unei secțiuni transversle, pot exista următoarele tensiuni:
   a).N,T și M;
   b).σ și T;
   c).σ și τ.

3. Care dintre figurile de mai jos este corectă?

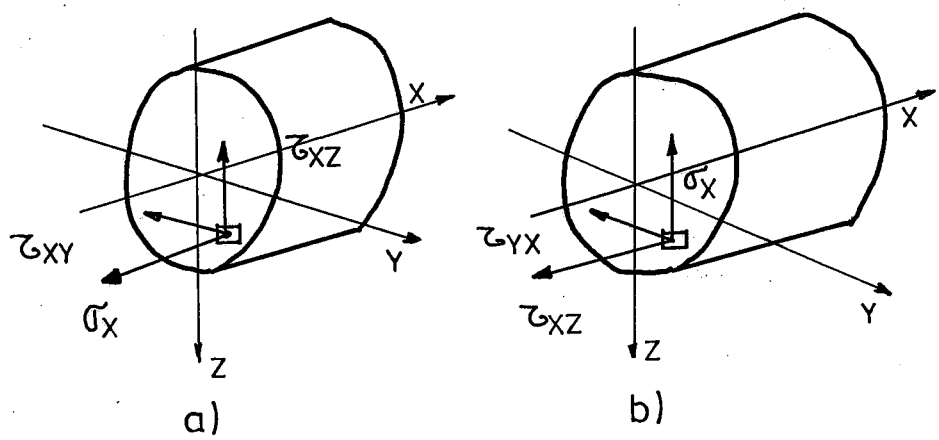


Figura 3.11.

   a).figura 3.11.a este corectă;
   b).figura 3.11.b este corectă;
   c).nu este corectă nici o figură.

4. Câte componente are torsorul eforturilor pentru o bară dreaptă solicitată în planul ei?
   a).două;
   b).trei;
   c).patru.

5. În care din figurile de mai jos este reprezentat un moment încovoietor pozitiv?

Figura 3.12.

a).în figura 3.12.a;
b).în figura 3.12.b;
c).în ambele figuri;
d).în nici una.

6. În care din figurile de mai jos forța tăietoare este pozitivă?

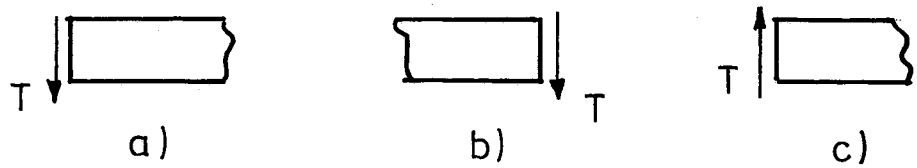


Figura 3.13.

a).în figura 3.13.a;
b).în figura 3.13.b;
c).în figura 3.13.c.

7. Efortul axial este pozitiv atunci când:
   a).are sensul normalei exterioare pe fața care se calculează;
   b)."trage" de secțiune;
   c).are sensul axei Ox.

8. Diagramele de eforturi reprezintă:
   a).variația eforturilor în lungul axei barei;
   b).graficele eforturilor, considerate ca și functii de variabila x;
   c).variația încărcărilor exterioare în lungul axei barei.

9. Valorile eforturilor într-o secțiune oarecare de abscisă x depind de:
   a).forma și dimensiunile secțiunii normale;
   b).valoarea încărcărilor exterioare;
   c).tipul reazemelor;
   d).poziția încărcărilor exterioare.

10. Forma diagramelor de eforuri depinde de:
    a).forma și dimensiunile secțiunii normale;
    b).valoarea încărcărilor exterioare;
    c).poziția încărcărilor exterioare;
    d).modul de distribuție al încărcărilor exterioare.

Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

11. Dacă o bară este încărcată cu o forță uniform distribuită q, atunci diagrama M va fi o parabolă de gradul III.
    a).adevărat;
    b).fals.

12. Dacă într-o secțiune normală a unei bare forța tăietoare este nulă, atunci diagrama M va avea un extrem în acea secțiune.
    a).adevărat;
    b).fals.

13. Dacă o bară este încărcată numai cu forțe concentrate, atunci diagrama M va fi constantă între forțe.
    a).adevărat;
    b).fals.

14. Dacă forța tăietoare este constantă și negativă pe un interval al unei bare drepte, atunci diagrama M va fi o parabolă de gradul II crescătoare pe acel interval.
    a).adevărat;
    b).fals.

15. Dacă într-o secțiune diagrama M are un punct de inflexiune, atunci diagrama T va avea un punct de extrem în secțiunea respectivă.
    a).adevărat;
    b).fals.

Stabiliți care dintre următoarele diagrame este corectă:

16.

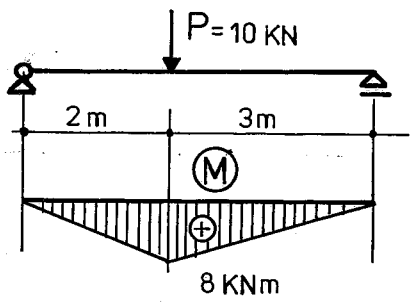


Figura 3.14.

a).corectă;
b).greșită;
b1).este greșită forma de variație;
b2).este greșită valoarea momentului.

17.

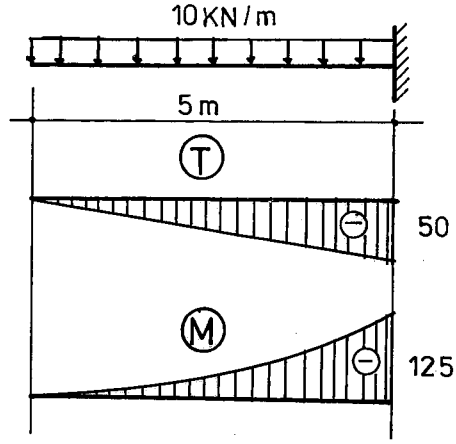


Figura 3.15.

a).corectă;
b).greșită;
b1).este greșită diagrama T;
b2).este greșită diagrama M.

18.

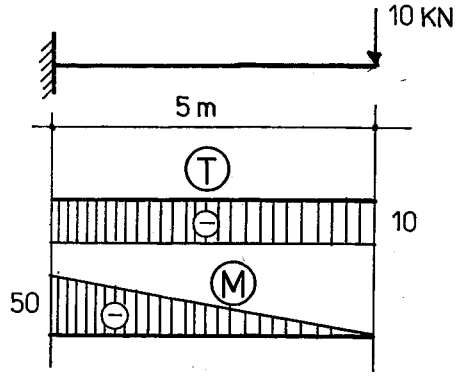


Figura 3.16.

a).corectă;
b).greșită;
b1).este greșită diagrama T;
b2).este greșită diagrama M.

19.

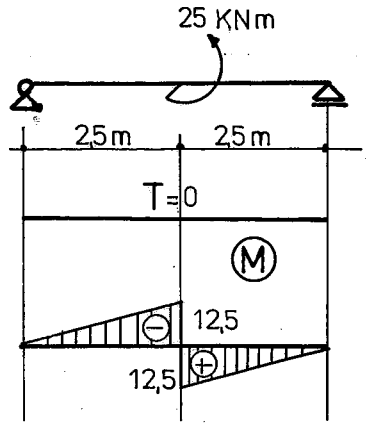


Figura 3.17.

a).corectă;
b).greșită;
b1).este gresită diagrama T;
b2).este gresită diagrama M.

20.

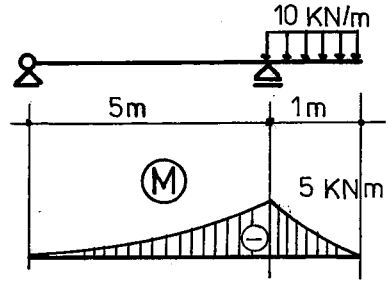


Figura 3.18.

a).corectă;

b).greșită;

b1).este greșită diagrama T;
b2).este greșită diagrama M.

Analizați diagramele de mai jos și stabiliți greșeala, acolo unde ea apare. Cu o altă culoare, reprezentați diagrama corectată.

21.

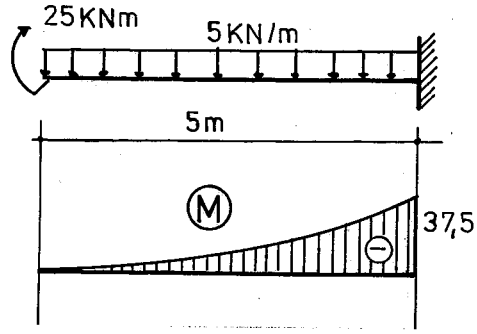


Figura 3.19.

a).corectă; b).greșită.

22.

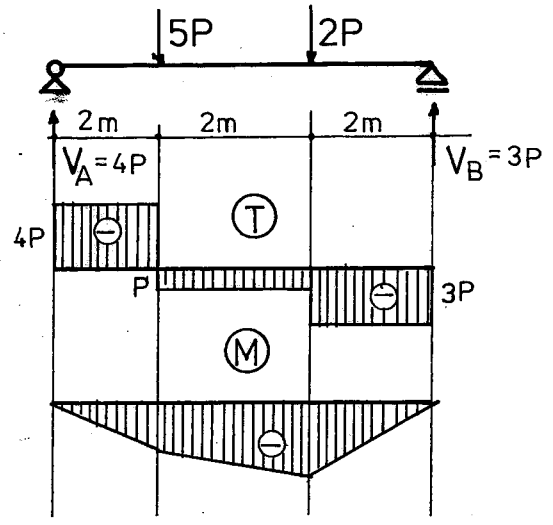


Figura 3.20.

a).corectă; b).greșită.

23.

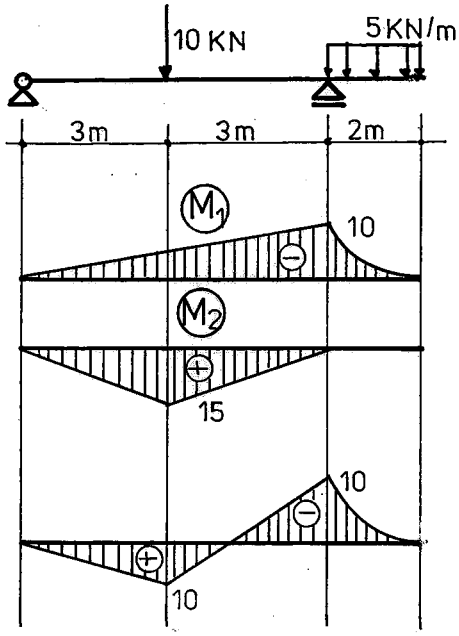


Figura 3.21.

a).corcctă; b).grcșită.

24.

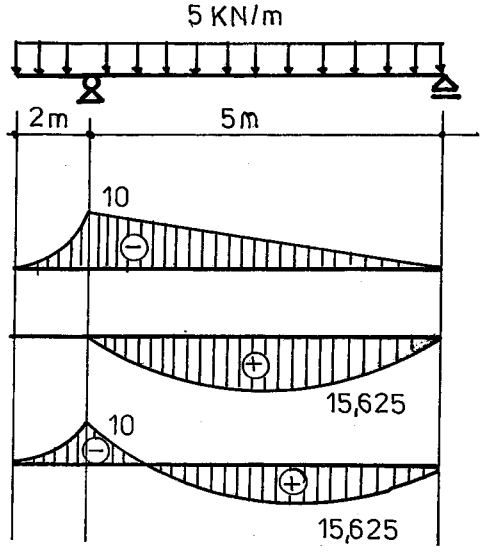


Figura 3.22.

a).corectă; b).greșită.

Decideți dacă următoarele diagrame sunt posibile (corecte). Dacă nu, încercuiți cu o altă culoare zonele greșite.

25.

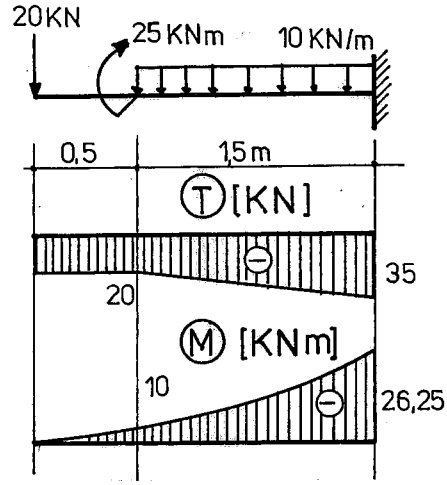


Figura 3.23.

a).corectă; b).greșită.

26.

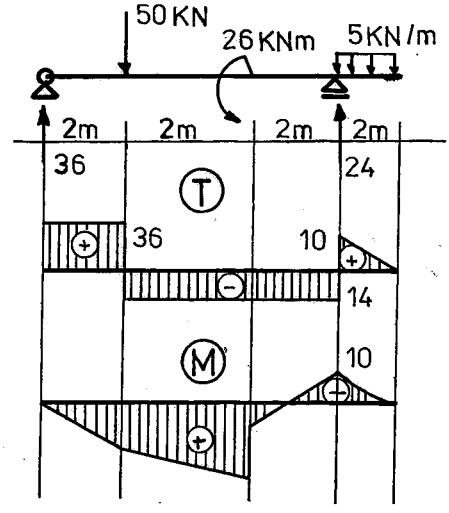


Figura 3.24.

a).corectă; b).greșită.

27.

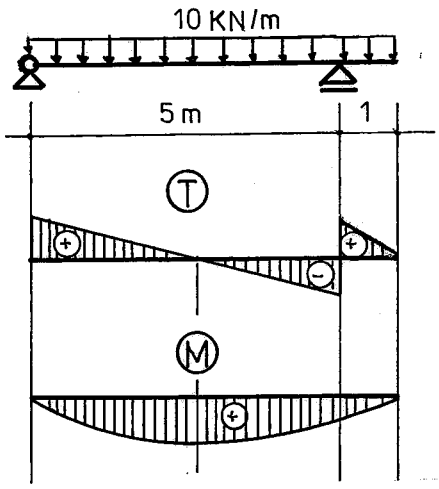


Figura 3.25.

a).corectă; b).greșită.

28.

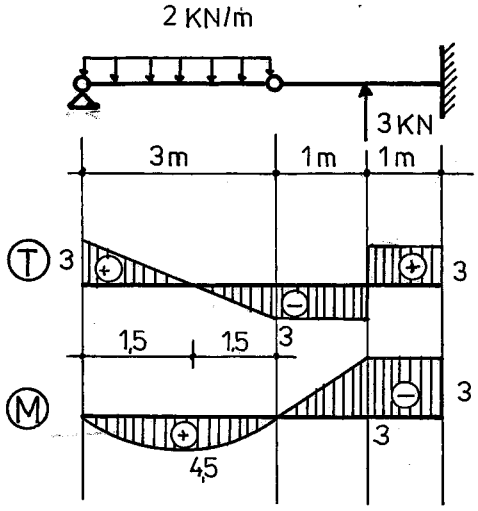


Figura 3.26.

a).corectă; b).greșită.

29. Pentru o bară simplu rezemată încărcată simetric, sunt adevărate următoarele afirmații:
    a).diagramaT este simetrică;
    b).diagrama M este simetrică;
    c).eforturile sunt maxime la jumătatea deschiderii.

30. Diagramele de eforturi pe o bară încastrată pot fi simetrice / antisimetrice?
    a).da;
    b).nu.

Lucrarea 4:

ÎNCERCAREA LA ÎNTINDERE ȘI COMPRESIUNE A OȚELULUI DE CONSTRUCȚII

- Lucrare experimentală -

A.NOȚIUNI TEORETICE

1.Pregătirea încercării

Experimentul urmărește stabilirea unor legături între mărimile mecanice (eforturi) și cele geometrice, precum și valorile pe care aceste mărimi le ating în fazele caracteristice ale procesului solicitării.

Încercările se vor realiza cu ajutorul unei prese hidraulice universale (figura 4.1).

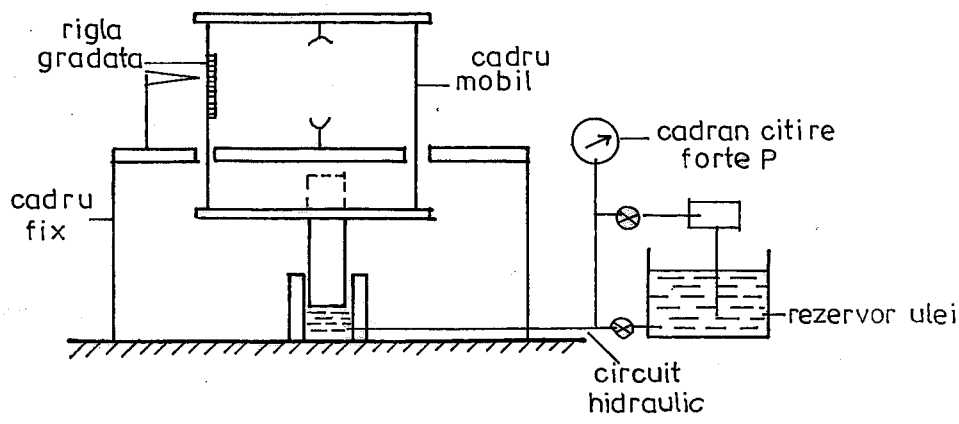
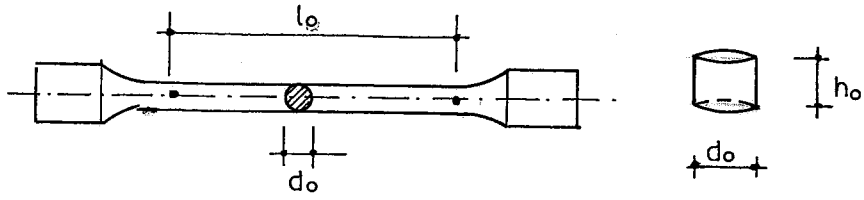


Figura 4.1. Presa hidraulică universală.

Proprietățile mecanice se determină pe epuvete standardizate. Forma și dimensiunile acestora sunt stabilite în funcție de tipul solicitării și de materialul încercat (figura 4.2).



a) b)

Figura 4.2. Epuvete standardizate pentru încercarea materialelor: a) epuvetă pentru încercarea la întindere a oțelului; b) epuvetă pentru încercarea la compresiune a oțelului și a fontei.

Pe parcursul încercării se vor citi (pe cadranul presei) forțele aplicate și deformațiile absolute ale epruvetei corespunzătoare acesor forțe (pe ceasul microcomparator atașat epruvetei, pentru deformații mai mici de 10 mm și pe rigla gradată pentru deformații mai mari de 10 mm).

Datele experimentale vor fi înregistrate și prelucrate în tabele (vezi paragraful 2); pe baza lor se va trasa curba caracteristică σ - ε a materialului și se vor determina caracteristicile mecanice ale acestuia.

2. Desfășurarea încercării; înregistrarea datelor experimentale

a).Încercarea la întindere a oțelului de construcții

Încercarea se face pe epruvete de tipul celor din figura 4.2.a.
Se măsoară, cu ajutorul șublerului, dimensiunile inițiale ale epruvetei:

d_o = diametrul inițial al epuvetei;

l_o = lungimea inițială a epruvetei (între marcaje);

Se calculează aria inițială a secțiunii normale a epruvetei:

$$A_o = \frac{\pi \cdot d_o^2}{4}.$$

Înregistrarea și prelucrarea datelor experimentale se va face în tabelul 4.1.

Tabelul 4.1.

Date experimentale			Prelucrarea datelor experimentale				
Treapta de încărcare	Forta P [daN]	Deformatia absolută Δl [mm]	Tensiunea $\sigma = \frac{P}{A_o}$ [N/mm²]	Deformația specifică $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_o}$	$\Delta\sigma$	$\Delta\varepsilon$	$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}$
0	1	2	3	4	5	6	7
1	500						
2	1000						
3	1500						
4	2000						

Încercarea se va face până la ruperea epruvetei. Se vor înregistra în mod special valorile forțelor și deformațiilor corespunzătoare intrării/ ieșirii din palierul de curgere și ruperii epruvetei. După producerea ruperii, se va măsura:

l_r = lungimea epruvetei după rupere (prin alipirea celor două părți rezultate în urma ruperii);

d_r = diametrul epruvetei la rupere în zona gâtuită.

Se vor nota observațiile făcute în legătură cu aspectul secțiunii de rupere și modul în care s-a produs ruperea epruvetei.

b).Încercarea la compresiune a otelului de construcții și a fontei

Încercarea se face pe epruvete de tipul celor din figura 4.2.b.

Se măsoară dimensiunile inițiale ale epruvetei:

h_o = înălțimea inițială a epruvetei;

d_o = diametrul inițial al epruvetei.

Se determină aria inițială a secțiunii normale:

$$A_o = \frac{\pi \cdot d_o^2}{4}.$$

Înregistrarea și prelucrarea datelor experimentale se va face în tabelul 4.2.

Tabelul 4.2.

Treapta de încărcare	Forța P daN	OȚEL			FONTA		
		Δh mm	$\sigma = \frac{P}{A_o}$ daN/mm²	$\varepsilon = \frac{\Delta h}{h_o}$	Δh mm	$\sigma = \frac{P}{A_o}$ daN/mm²	$\varepsilon = \frac{\Delta h}{h_o}$
0	1	2	3	4	5	6	7
1	500						
2	1000						
3	1500						

Încercarea se va face până la ruperea epruvetei sau reducerea înălțimii acesteia la jumătate. Se vor înregistra în mod special valorile forțelor și deformațiilor corespunzătoare ruperii epruvetei sau reducerii înălțimii acesteia la jumătate. În cazul când se produce ruperea epruvetei, se vor face observații privind aspectul secțiunii de rupere și modul în care s-a produs ruperea.

3. Prelucrarea datelor experimentale

Pe baza datelor din tabelul 4.1, coloanele 4 și 5, se va trasa la scară, pe hârtie milimetrică, curba caracteristică a materialului.

Utilizând curba trasată, se vor determina următoarele caracteristici mecanice și deformațiile specifice corespunzătoare acestora:

- σ_p , ε_p = limita de proporționalitate a materialului și deformația specifică corespunzătoare acesteia;
- σ_c , ε_c, ε_c' = limita de curgere a materialului și deformația specifică corespunzătoare intrării, respectiv ieșirii din palierul de

curgere;

- σ_r , ε_r = rezistența de rupere a materialului și deformația specifică corespunzătoare acesteia;

Observație: ε_r se va compara cu deformația specifică calculată pe baza măsurătorilor epruvetei după rupere:

$$\varepsilon_r' = \frac{\Delta l_r}{\Delta l_o}$$

și se va explica de unde provine diferența.

- $\psi_r = \frac{A_o - A_r}{A_o} 100\ \%$ - strictiunea la rupere;
- $E = tg\ \alpha$ - modulul de elasticitate longitudinal;

Observație: E se va compara cu cel calculat pe baza datelor experimentale (coloana 7) și se vor explica eventualele diferențe.

Se va decide asupra tipului de rupere (casant/ ductil) și se va justifica alegerea făcută.

Se va trasa, în final, curba caracteristică schematizată a materialului încercat.

*

Pentru încercările la compresiune, se va urmări comparativ comportarea celor două materiale sub încărcări. Se vor trasa pe același grafic curbele caracteristice la compresiune ale oțelului și fontei. Se va decide asupra modului de rupere al celor două materiale și se va justifica alegerea făcută.

D. TEST DE VERIFICARE A CUNOȘTINȚELOR

1. Care dintre ipotezele Rezistenței materialelor enumerate mai jos sunt confirmate de comportarea la întindere oțelului observată experimental?
   a).ipoteza stării naturale a corpurilor;
   b).ipoteza secțiunilor plane (ipoteza lui Bernuolli);
   c).ipoteza micilor deformații.

2. Se dă curba caracteristică din figura 4.3. Stabiliți pe care dintre intervalele ei se poate aplica legea lui Hooke?
   a).intervalul O-A;
   b).intervalul O-B
   c). intervalele O-C si D-F.

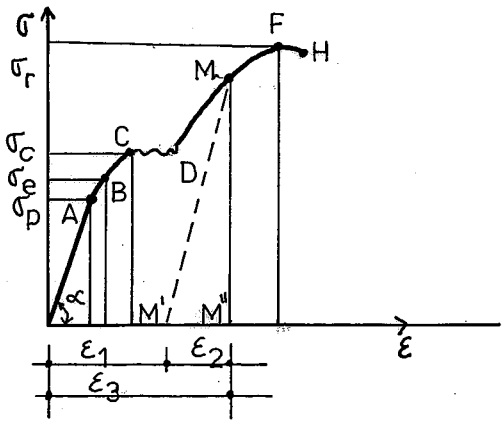


Figura 4.3.

3. Care interval al curbei caracteristice din figura 4.3. reprezintă palierul de curgere?
   a). intervalul B-C;
   b). intervalul B-D;
   c). intervalul C-D.

4. Fie punctul M de pe curba caracteristică din figura 4.3. Precizați care dintre afirmațiile de mai jos sunt adevărate:
   a).la descărcare se va parcurge segmentul MM";
   b).la descărcare se va parcurge segmentul MM';
   c). la descărcare se va parcurge curba MO.

5. Care dintre deformațiile specifice ε_1, ε_2, ε_3 reprezentate în figura 4.3. reprezintă deformații remanente?
   a).ε_1;
   b).ε_2;
   c).ε_3.

6. Care dintre curbele caracteristice schematizate din figura 4.4 este a unui material ideal elastic?
   a). curba din figura 4.4.a;
   b). curba din figura 4.4.b;
   c). curba din figura 4.4.c.

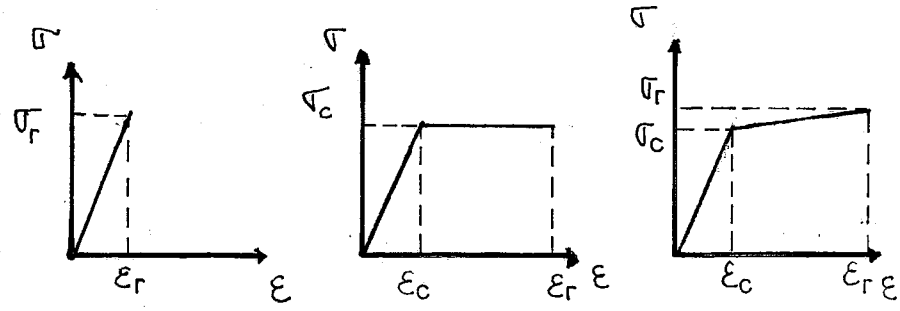


Figura 4.3.

7. Care dintre următoarele materiale prezintă ruperi casante?
   a).aluminiu;
   b).fontă;
   c).beton.

8. Care dintre factorii de mai jos nu influentează caracteristicile mecanice ale materialului?
   a).viteza de încărcare;
   b).durata de acțiune a încărcărilor;
   c).direcția de acțiune a încărcărilor.

9. Coeficientul lui Poisson este o constantă care caracterizează:
   a).geometria barei;
   b).încărcările exterioare care acționează bara;
   c).materialul din care este alcătuită bara.

10. Legea lui Hooke se poate aplica dacă :
    a).curba caracteristică a materialului prezintă palier de curgere;
    b).materialul este casant;
    c).materialul este cristalin;
    d).nici una dintre conditiile a)...c) nu este suficientă.

11. Care dintre următoarele ipoteze este aplicabilă numai în Rezistența materialelor (nu și în Teoria elasticității)?
    a).ipoteza micilor deformații;
    b).ipoteza secțiunilor plane;
    c).principiul lui Saint-Venant.

12. Rezistența admisibilă pentru un material casant se calculează astfel:

a). $\sigma_a = \frac{\sigma_c}{c}$, unde c este coeficientul de siguranță;

b). $\sigma_a = \frac{\sigma_r}{c}$, unde c este coeficientul de siguranță.

13. Care dintre metodele de calcul de mai jos face parte din categoria celor semiprobabiliste?
    a).metoda la rupere;
    b).metoda stărilor limită;
    c).metoda rezistențelor admisibile.

14. Care dintre ipotezele Rezistenței materialelor enumerate mai jos, conduc la probleme cu liniaritate fizică?
    a).ipoteza echilibrului static sau dinamic;
    b).ipoteza micilor deformații;
    c).legea lui Hooke.

15. Care dintre ipotezele Rezistenței materialelor enumerate mai jos, conduc la probleme cu liniaritate geometrică?
    a).ipoteza secțiunilor plane;
    b).ipoteza micilor deformații;
    c).legea lui Hooke.

Lucrarea 5:

BARE SUDATE SOLICITATE AXIAL

A. NOȚIUNI TEORETICE

1.Generalități

Calculul barelor sudate solicitate axial se face plecând de la premisa că ele sunt, de fapt, ansambluri compuse din bara propriu-zisă și îmbinarea sudată.

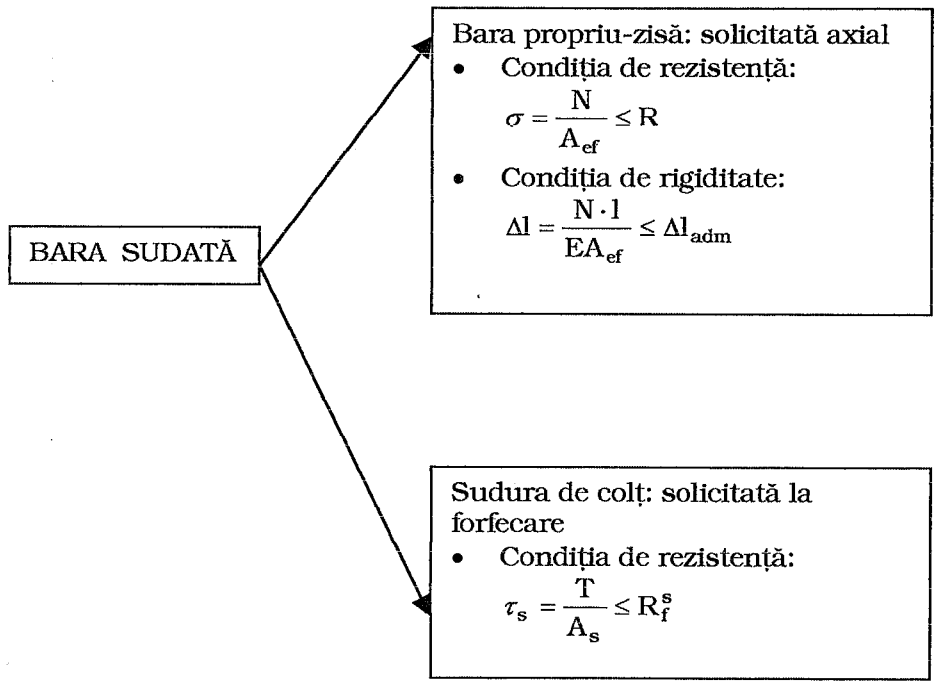

BARA SUDATĂ
Bara propriu-zisă: solicitată axial
• Condiția de rezistență:
$\sigma = \frac{N}{A_{ef}} \leq R$
• Condiția de rigiditate:
$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EA_{ef}} \leq \Delta l_{adm}$
Sudura de colț: solicitată la forfecare
• Condiția de rezistență:
$\tau_s = \frac{T}{A_s} \leq R_f^s$

Figura 5.1: Calculul barelor solidarizate cu suduri de colț.

Mărimile din relațiile de mai sus au următoarea semnificație:
- σ = tensiune normală în secțiunea barei solicitată axial;
- N = efort axial în bară;

- A_{ef} = aria secțiunii normale a barei;
- R = rezistența de calcul a materialului;
- Δl = deformația axială absolută a barei;
- Δl_{adm} = deformația axială limită (admisibilă);
- E = modulul de elasticitate longitudinal;
- τ_s = tensiune tangențială în cordonul de sudură de colț;
- T = forța tăietoare în cordonul de sudură de colț;
- A_s = aria secțiunii normale a cordonului de sudură de colț;
- R_f^s = rezistența la forfecare a cordonului de sudură de colț.

2. Bare solicitate axial

a).Eforturi

Solicitarea axială este caracterizată de prezența, în secțiunile normale ale barei, numai a efortului axial $N \neq 0$ (restul eforturilor secționale fiind nule). Efortul N este pozitiv dacă are sensul normalei exterioare a secțiunii (Lucrarea 2), adică "trage" de secțiune. Dacă $N > 0$ spunem că avem solicitare de **întindere** și dacă $N < 0$ solicitarea este de **compresiune**. Trasarea diagramei de eforturi se face conform regulilor arătate în lucrările precedente.

b).Tensiuni

În secțiunile barelor solicitate la întindere sau compresiune axială, apar tensiuni normale σ, având o distribuție uniformă pe secțiune. Ele au același semn ca și efortul axial N, deci sunt pozitive dacă sunt întinderi.

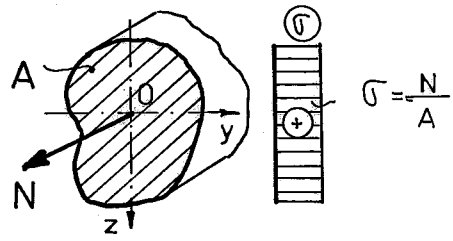


Figura 5.2.: Distribuția tensiunilor σ în secțiunea normală.

- Condiția de rezistență la întindere sau compresiune axială:

$$\sigma = \frac{N}{A_{ef}} \leq R$$

- Condiția de rigiditate la întindere sau compresiune axială:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA_{ef}} \leq \Delta l_{adm}$$

c).Problemele Rezistenței materialelor în cazul barelor drepte solicitate la întindere sau compresiune axială

- VERIFICAREA:

- se cunosc:
  - geometria barei⇒ se poate calcula aria secțiunii normale A_{ef} ;
  - schema de încărcare⇒ se poate determina diagrama de eforturi N;
  - materialul din care este alcătuită bara⇒ se scoate din tabele rezistența de calcul R.

- se cere: să se stabilească dacă bara lucrează sau nu în condiții de siguranță, adică să se verifice dacă condiția de rezistență:

$$\sigma = \frac{N}{A_{ef}} \leq R \quad (1)$$

este satisfăcută în orice secțiune a barei.

Observații:

1) *Dacă bara are secțiunea constantă, este suficient să se verifice secțiunea maxim solicitată, adică secțiunea în care efortul axial este maxim în valoare absolută* ($|N|_{max}$).

2) *Verificarea barelor cu secțiunea variabilă în trepte se va face pe fiecare tronson de secțiune constantă.*

3) *Pentru secțiunile care prezintă goluri,* A_{ef} *se va lua după cum urmează:*

$A_{ef} = A_{brut} - A_{gol}$... ... *pentru bare întinse și pentru bare comprimate ale căror goluri nu sunt umplute (cu elemente de îmbinare);*

$A_{ef} = A_{brut}$... ... ... *pentru bare comprimate ale căror goluri sunt umplute cu elemente de îmbinare.*

- DIMENSIONAREA:

❑ se cunosc:
  - schema de încărcare⇒ se poate determina diagrama de eforturi N;
  - materialul din care este alcătuită bara⇒ se scoate din tabele rezistența de calcul R.

❑ se cere: să se stabilească geometria barei astfel încât aceasta să lucreze în condiții de siguranță, adică să fie verificată condiția de rezistență (1) în orice secțiune a barei.

Pentru rezolvarea acestei probleme, se alege forma secțiunii normale a barei. Dimensiunile acestei secțiuni vor resprcta relația:

$$A_{nec} \geq \frac{N}{R} \quad (2)$$

După stabilirea dimensiunilor secțiunii se va face obligatoriu verificarea acesteia, utilizând dimensiunile reale (A_{ef}).

Observații:

1) *Dacă secțiunea este alcătuită din profile laminate, aceasta se alege direct, utilizând tabelele din Anexe.*

2) *În cazul barelor cu secțiune constantă, dimensionarea se face în secțiunea maxim solicitată (pentru $|N|_{max}$).*

- CAPACITATEA PORTANTĂ

❑ se cunosc:
  - geometria barei⇒ se poate calcula aria secțiunii normale A_{ef} ;
  - materialul din care este alcătuită bara⇒ se scoate din tabele rezistența de calcul R;
  - schema de încărcare, mai puțin intensitățile forțelor⇒ se poate determina diagrama de eforturi N folosind principiul suprapunerii efectelor.

❑ se cere: să se stabilească valoarea maximă a intensităților forțelor astfel încât bara să lucreze în condiții de siguranță, adică să verifice condiția de rezistență (1) în orice secțiune.

Pentru rezolvarea acestei probleme, se determină capacitatea portantă a barei:

$$N_{cap} = A_{ef}R \quad (3)$$

Observație: Capacitatea portantă a unei secțiuni este efortul maxim pe care secțiunea îl poate prelua în condiții de siguranță. Acesta depinde numai de forma și dimensiunile secțiunii, încărcările exterioare neavând nici o influență asupra acestei valori.

Determinarea forței capabile, adică cea mai mare valoare pe care o poate lua forța pe o anumită schemă de încărcare, se face rezolvând ecuația:

$$|N|_{max} = N_{cap} \quad (4)$$

unde N_{max} se evaluează prin adunarea algebrică a valorilor forțelor axiale din diagramele de eforturi simple în secțiunile prriculoase.

O *secțiune periculoasă* este aceea în care cel puțin una dintre diagramele simple are un extrem.

3. Suduri de colț

a).Eforturi

Sudurile de colț sunt solicitate la forfecare, adică în secțiunea normală a unei suduri de colț, singurul efort diferit de zero este forța tăietoare T. Forța P, care solicită axial bara, va solicita la forfecare cordoanele de sudură de colț.

Determinarea valorii forței tăietoare care solicită un cordon de sudură, se face astfel:

- dacă toate cordoanele sunt egale și simetrice în raport cu axa barei (figura 5.3.a):

$$T_i = \frac{N}{n} \quad (5), \quad \text{unde n reprezintă numărul de cordoane.}$$

- Dacă cordoanele nu sunt simetrice (figura 5.3.b -cazul profilului cornier), atunci se pun condițiile:

$$\sum_1 T_i = P \text{ (ccuația dc cchilibru);}$$

$$\sum_1 T_i b_i = 0 \text{ (să nu apară momente în cordoanele de sudură).}$$

Pentru profilul cornier, aceste ecuații se pot scrie:

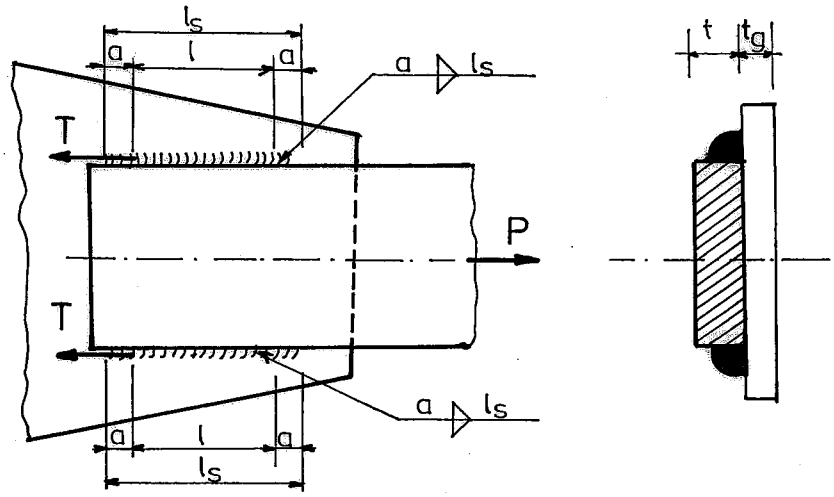
$$T_1 + T_2 = P$$

$$T_1 e - T_2 (b - e) = 0;$$

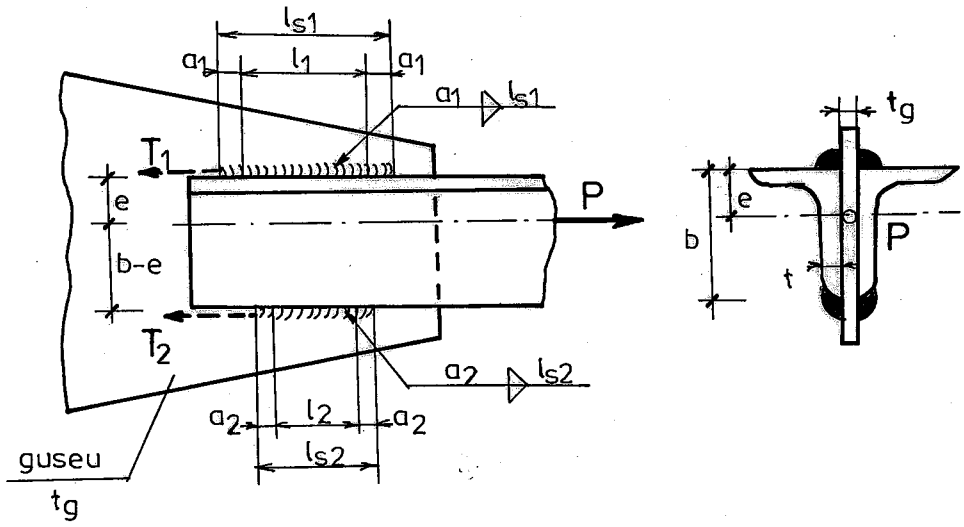
adică eforturile în cele două cordoane superioare, respectiv inferioare, vor fi:

$$T_1 = \frac{P(b-e)}{b} \qquad (6)$$

$$T_2 = \frac{P \cdot e}{b}$$



a).Cordoane de sudură simetrice.



b).Cordoane de sudură nesimetrice.

Figura 5.3.:Eforturi în cordoanele de sudură de colț.

b).Tensiuni

În cordoanele de sudură de colț apar tensiuni tangențiale τ care se calculează cu relația:

$$\tau_s = \frac{T_1}{A_s},$$

unde: T_1 = efortul în cordonul de sudură;

$A_s = a \cdot l$, este aria de calcul a cordonului de sudură

a = grosimea cordonului de sudură, trebuie să satisfacă condițiile:

- $a \geq 3$ mm;
- $a \leq 0{,}7 \cdot t_{min}$ sau $a \leq 0{,}85 \cdot t_{min}$;
- multiplu de 1mm.

$l = l_s - 2 \cdot a$, este lungimea de calcul a cordonului de sudură, l_s fiind lungimea de execuție a cordonului (reprezentată în desen);

condițiile pentru l_s:

- $l_s \geq 6 \cdot a$, respectiv $15 \cdot a$ pentru profile;
- $l_{s,min} = 40$ mm;
- $l_s \leq 60 \cdot a$, respectiv nelimitat în cazul solicitării uniforme;
- multiplu de 5 mm.

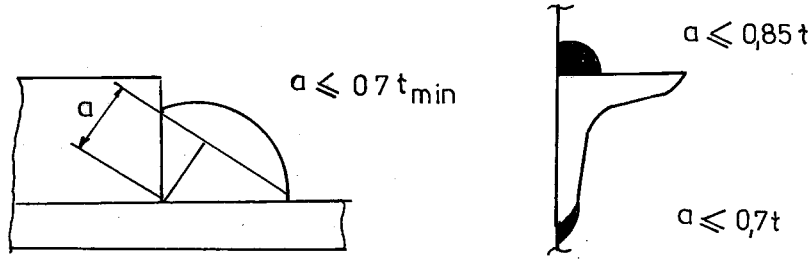


Figura 5.4: Grosimea maximă a sudurilor de colț pentru profile laminate.

c).Problemele Rezistentei materialelor pentru îmbinările executate prin sudură de colț

- VERIFICAREA:

$$\tau_s = \frac{T}{n \cdot a \cdot l} \leq R_f^s \quad (7)$$

unde: n = numărul de cordoane simetrice;

$R_f^s = 0{,}8R$, este rezistența la forfecare a cordoanelor de sudură de colț (se poate scoate direct din tabel Anexa 2).

- DIMENSIONAREA:

Sc impunc grosimca cordonului $3mm \leq a \leq 0{,}7 \cdot t_{min} (0{,}85 \cdot t_{min})$.

Se determină lungimea de calcul minimă necesară a sudurii:

$$l_{nec} \geq \frac{T}{n \cdot a \cdot R_f^s} \quad (8),$$ și apoi lungimea de execuție a cusăturii:

$$l_s = l_{nec} + 2a \quad (9),$$

care se rotunjește în sus la multiplu de 5 mm.

- EFORTUL CAPABIL:

Efortul capabil al îmbinării sudate se calculează ca fiind egal cu:

$N_{cap}^{sud} = \sum A_s R_f^s$ (10) , unde A_s reprezintă aria tuturor cordoanclor dc sudură carc formcază îmbinarca (indifcrcnt dacă sunt simetrice sau nu).

4.Sinteza celor două solicitări

- VERIFICAREA BAREI SUDATE:

Pentru ca bara sudată să lucreze în condiții de siguranță trebuie satisfăcute simultan condițiile de rezistență (1) și (7), adică să nu cedeze nici secțiunea barei, nici îmbinările prin sudură.

Dacă oricare din aceste două condiții nu este satisfăcută, se spune că bara sudată nu verifică.

- DIMENSIONAREA BAREI SUDATE:

Se dimensionează atât secțiunea barei cât și cordoanele de sudură în secțiunea maxim solicitată. Dacă nu se precizează altfel, sudurile se dimensionează la efortul capabil al sectiunii barei (N_{cap}^{sect}) ; aceasta presupune că cedarea va loc simultan în secțiunea barei și în cordonul de sudură.

- EFORTUL CAPABIL AL BAREI SUDATE:

Efortul capabil al unei bare îmbinată cu sudură de colț se consideră egal cu minimul dintre efortul capabil al secțiunii barei și efortul capabil al sudurii:

$$N_{cap} = \min\left(N_{cap}^{sect}, N_{cap}^{sud}\right).$$

B. EXEMPLE DE CALCUL

E 5.1: Se dă bara din figura 5.5, având secțiunea alcătuită din două profile cornier L 100×100×10, oțel OL 37. Bara este solicitată de forța P=800 kN. Îmbinarea celor două profile se face cu sudură de colț pe ambele părți ale unui guseu având grosimea t_g=14mm. Se cere:

a).Să se verifice bara .

b).Să se determine deplasarea capătului liber al barei, știind că lungimea ei este de 6 metri.

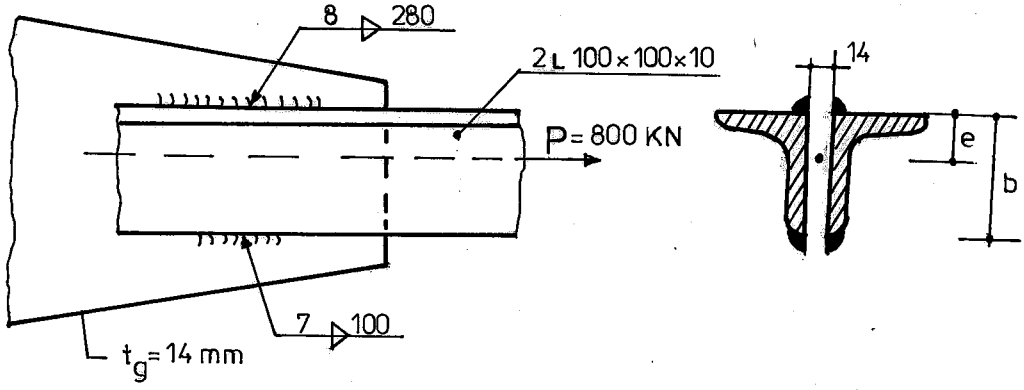


Figura 5.5.

Rezolvare:

a).Se va verifica mai întâi secțiunea barei și apoi se vor verifica cordoanele de sudură de colț. Din tabelele anexe se scot rezistențele de calcul și caracteristicile geometrice ale profilului:

$R = 210\,N/mm^2$; $R_f^s = 150\,N/mm^2$; $E = 2{,}1 \cdot 10^5\,N/mm^2$.

$b = 10\,cm$; $e = 2{,}82\,cm$; $A_1 = 19{,}2\,cm^2$.

Verificarea secțiunii barei:

$$\sigma = \frac{N}{A_{ef}} = \frac{P}{2A_1} = \frac{800 \cdot 10^3}{2 \cdot 19{,}2 \cdot 10^2} = 208{,}3\,N/mm^2 < R = 210\,N/mm^2$$

deci secțiunea barei verifică condiția de rezistență sau, altfel spus, ruperea nu se va produce în secțiunile barei.

Cordoanele de sudură sunt nesimetrice în raport cu axa barei. Se vor determina mai întâi eforturile în cele două grupuri de cordoane (superioare, respectiv inferioare), apoi se va face verificarea pe grupuri de suduri identice.

$$T_1 = P\frac{b-e}{b} = 800\frac{10-2{,}82}{10} = 574{,}4\,kN,$$

$$T_2 = P\frac{e}{b} = 800\frac{2{,}82}{10} = 255{,}6\,kN.$$

Pentru cordoanele superioare:

- Verificarea condițiilor constructive:

$3mm \le a \le 0{,}85 \cdot t_{min} = 0{,}85 \cdot 10 = 8{,}5mm$; $a_1 = 8\,m$ se include între limitele extreme.

$l_1 = l_{s,1} - a_1 = 280 - 2 \cdot 8 = 264\,mm > l_{min} = 15a = 15 \cdot 8 = 120\,mm.$

- Verificarea tensiunilor:

$$\tau_{s,1} = \frac{T_1}{n \cdot a_1 \cdot l_1} = \frac{574{,}4 \cdot 10^3}{2 \cdot 8 \cdot 264} = 136\,N/mm^2 < R_f^s = 150\,N/mm^2$$

deci cordoanele superioare nu vor ceda.

Pentru cordoanele inferioare:

- Verificarea condițiilor constructive:

$3mm < 7mm \le 0{,}7t_{min} = 0{,}7 \cdot 10 = 7mm$; $a_2 = 7\,mm$.

$l_2 = 100 - 2 \cdot 7 = 86\,mm < l_{min} = 15 \cdot 7 = 105\,mm$, deci cordonul este prea scurt.

- Verificarea tensiunilor:

$$\tau_{s,2} = \frac{255{,}6 \cdot 10^3}{2 \cdot 7 \cdot 86} = 212{,}3\ N/mm^2 > R_f^s = 150\ N/mm^2\ ,$$

deci cordoanele inferioare nu verifică condiția de rezistență.

În concluzie, se poate afirma că bara sudată nu verifică condițiile de rezistență. Ea va ceda prin ruperea cordoanelor de sudură inferioare.

b).Deplasarea capătului liber al barei este:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{800 \cdot 10^3 \cdot 6000}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot \left(2 \cdot 19{,}2 \cdot 10^2\right)} = 5{,}95\text{mm}.$$

E 5.2: Sistemul simetric alcătuit din trei bare reprezentat în figura 5.6, este acționat de forța P = 1000kN. În noduri, barele sunt îmbinate cu cordoane de sudură de colț, executate pe ambele fețe ale unor gusee cu grosimea de 12mm. Se cere:

a).Să se dimensioneze barele sistemului după cum urmează:
- bara 1 se va dimensiona din două profile U, oțel OL 37;
- barele 2 se vor dimensiona din două profile cornier, oțel OL 37.

b).Să se dimensioneze prinderile sudate ale barelor 1 și 2.

c).Să se determine deplasarea pe verticală a nodului C.

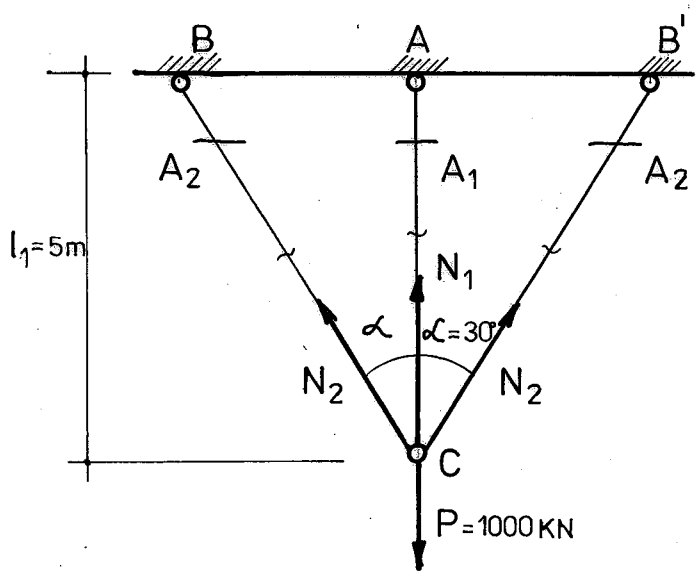


Figura 5.6.

Rezolvare:

a).Mai întâi se determină eforurile în barele sistemului. Sistemul este o dată static nedeterminat, deci pe lângă ecuația de echilibru se va mai scrie o ecuație de compatibilitate a deplasărilor. Ecuația de echilibru este:

$$N_1 + 2N_2 \cos\alpha = P \quad \text{(i)}.$$

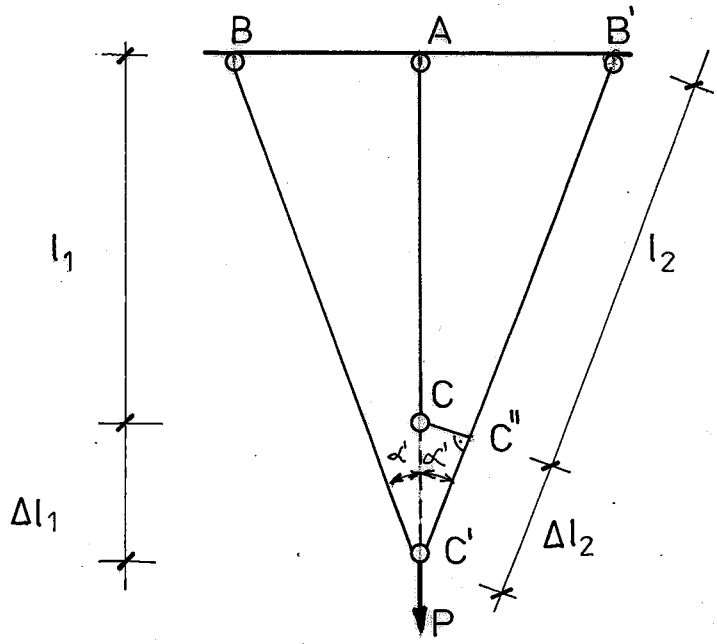


Figura 5.7.

Ecuația de compatibilitate a deplasărilor se scrie în nodul C; în urma deformării barelor, nodul C ajunge în C' (figura 5.7.). În ipoteza micilor deformații, se poate considera $\alpha \cong \alpha'$ și atunci, din triunghiul CC'C" se poate scrie:

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \cos\alpha \quad \text{(ii)}.$$

Dar: $\Delta l_1 = \dfrac{N_1 l_1}{EA_1}$; $\Delta l_2 = \dfrac{N_2 l_2}{EA_2}$; din triunghiul ABC: $l_1 = l_2 \cos\alpha$.

Cu aceste relații, ecuația (ii) devine:

$$\frac{N_1 l_1}{E\Lambda_1} = \frac{N_2 l_2}{E\Lambda_2}\cos\alpha, \text{ de unde } N_2 = N_1 \frac{A_2}{\Lambda_1}\cos^2\alpha \quad \text{(iii)}.$$

Înlocuim relația (iii) în (ii) și avem:

$$N_1 + 2N_1 \frac{A_2}{A_1}\cos^3\alpha = P\,,\ \text{și notăm cu}\ \ \lambda = \frac{A_2}{A_1}\cos^3\alpha\,.$$

Atunci:

$$N_1 = \frac{P}{1+2\lambda}\ \ \text{și}\ \ N_2 = \frac{P}{\cos\alpha}\cdot\frac{\lambda}{1+2\lambda}\quad \text{(iv)}.$$

Presupunem că : $A_1 = 2A_2$, atunci $\lambda = \frac{\cos^3 30}{2} = 0{,}325$.

În bare, vor rezulta eforturile:

$$N_1 = \frac{1000}{1+2\cdot 0{,}325} = 606{,}2\ \text{kN};\ N_2 = \frac{1000}{\cos 30}\cdot\frac{0{,}325}{1+2\cdot 0{,}325} = 227{,}5\ \text{kN}.$$

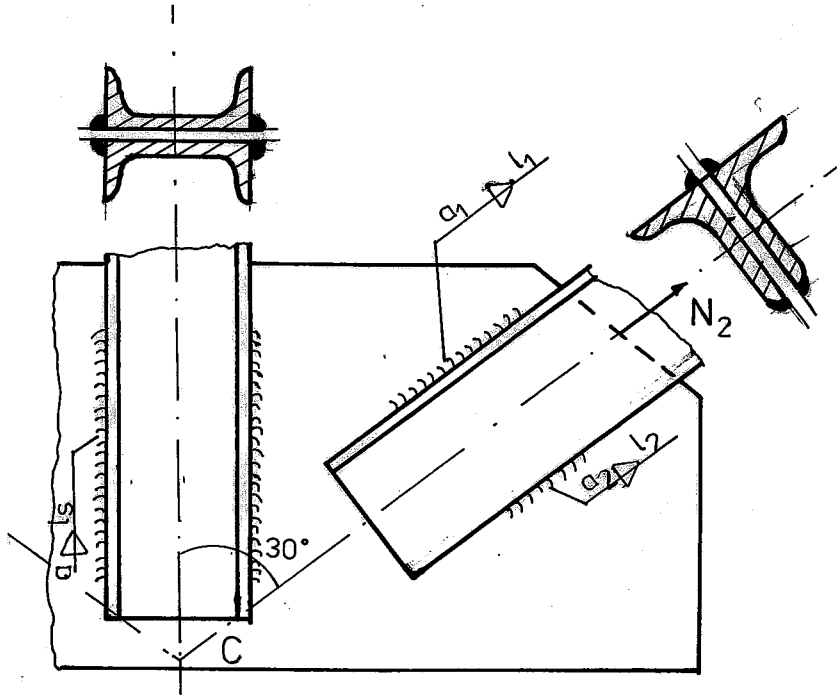


Figura 5.8.

Din tabele (Anexele 1 și 2)se scot: $R = 210\,\text{N/mm}^2$; $R_f^s = 150\,\text{N/mm}^2$; $E = 2{,}1\cdot 10^5\,\text{N/mm}^2$.

Dimensionarea barei 1 din două profile U:

$$A_{1,nec} \geq \frac{606,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 210} 10^{-2} = 14,43\,cm^2 \text{ ; aleg U12 cu } A_1 = 17\,cm^2.$$

Dimensionarea barei 2 din două profile cornier:

$$A_{2,nec} \geq \frac{227,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 210} 10^{-2} = 5,42\,cm2; \text{ 6 cu } A_2 = 5,69\,cm^2.$$

aleg L 50×50×6 cu $A_2 = 5,69\,cm^2$.

Pentru verificare, calculăm eforturile efective în bare cu relațiile (iv) și tensiunile efective în bare:

$$\lambda = \frac{5,69}{17}\cos^3 30 = 0,217\,; \; N_1 = \frac{1000}{1+2 \cdot 0,217} = 697\,kN;$$

$$N_2 = \frac{1000}{\cos 30} \cdot \frac{0,217}{1+2 \cdot 0,217} = 174,6$$

$$\sigma_1 = \frac{697 \cdot 10^3}{2 \cdot 17 \cdot 10^2} = 205\,N/mm^2 < R = 210\,N/mm^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{174,6 \cdot 10^3}{2 \cdot 5,69 \cdot 10^2} = 153,5\,N/mm^2 < R = 210\,N/mm^2.$$

Deoarece ambele bare verifică condiția de rezistență, dimensionarea făcută este corectă.

b).Cordoanele de sudură de pe bara 1 sunt simetrice în raport cu axa barei, deci se vor dimensiona simultan (figura 5.8.):

- grosimea sudurii se alege între:
  $3mm \leq a \leq 0,85t = 0,85 \cdot 9 = 7,65\,mm$; aleg $a = 7\,mm$.
- lungimea minimă a sudurii: $l_{min} = 15a = 15 \cdot 7 = 105\,mm$.
- calculul lungimii cordonului:

$$l_{nec} \geq \frac{697 \cdot 10^3}{4 \cdot 7 \cdot 150} = 166\,mm \; ; \; l_s = 166 + 2 \cdot 7 = 180\,mm.$$

Cordoanele de sudură de pe bara 2 sunt nesimetrice; se vor determina mai întâi eforturile în cele două grupuri de cordoane (superioare, respectiv inferioare). Profilul L 50×50×6 are b = 50mm si e = 1,45 cm.

$$T_1 = 174,5\frac{5-1,45}{5} = 124\,kN \; ; \; T_2 = 174,5\frac{1,45}{5} = 50,6\,kN.$$

Pentru cordoanele superioare: $a_{1,max} = 0,85 \cdot 6 = 5,1\,mm$;

$l_{1,min} = 15 \cdot 5 = 75$ mm;

$$l_{1,nec} \geq \frac{124 \cdot 10^3}{2 \cdot 5 \cdot 150} = 83 \text{ mm}; \quad l_{s,1} = 83 + 2 \cdot 5 = 93 \text{ mm},$$

care se rotunjeste în sus la multiplu de 5 mm; deci, $l_{s,1} = 95$ mm.

Pentru cordoanele inferioare: $a_{2,max} = 0{,}7 \cdot 6 = 4{,}2$ mm;

aleg $a_2 = 3$ mm.

$l_{2,min} = 15 \cdot 3 = 45$ mm;

$$l_{2,nec} \geq \frac{50{,}6 \cdot 10^3}{2 \cdot 3 \cdot 150} = 57 \text{ mm}; \quad l_{s,2} = 57 + 2 \cdot 3 = 63 \text{ mm},$$

care se rotunjeste în sus la multiplu de 5 mm; deci, $l_{s,2} = 65$ mm.

c).Deplasarca pc verticală a nodului C este:

$$CC' = \Delta l_1 = \frac{697 \cdot 10^3 \cdot 5000}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot (2 \cdot 17) \cdot 10^2} = 4{,}88 \text{ mm}.$$

E 5.3: Sistemul reprezentat în figura 5.9, este alcătuit dintr-o bară infinit rigidă ABC, articulată în punctul A și suspendată în B prin intermediul tirantului BD.

Tirantul are secțiunea alcătuită din două profile U20, oțel OL 37, solidarizate cu cordoane de sudură de colț. Sudurile sunt executate pe ambele fețe ale unui guseu având grosimea t_g = 10mm. Grosimea cordoanelor de sudură este a = 7mm și lungimea de execuție a acestor cordoane este l_s = 270mm.

Sistemul este solicitat de o forță P care acționează în capătul B al barei rigide. Se cere:

a).Să se determine forța capabilă a sistemului P_{cap}.

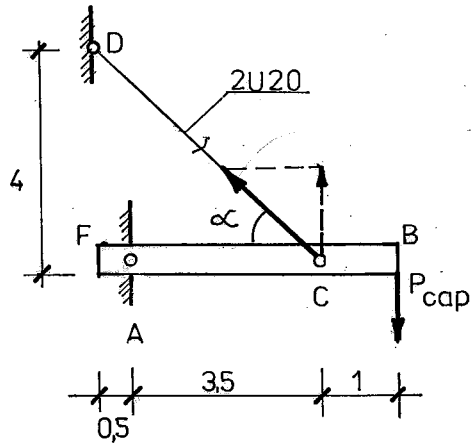
b).Să se calculeze deplasările capetelor B și F ale barei rigide.

Rezolvare:

a).Determinarea efortului în tirantul BD se face prin metoda secțiunilor: se taie tirantul și se înlocuiește cu efortul corespunzător, apoi se scrie ecuația de echilibru a barei rigide acționată de forțele exterioare și efortul din tirant. Ecuația de echilibru se scrie de preferință sub forma unei sume de momente în raport cu articulația barei rigide:

$$\sum M_A = 0 \; ; \; 3{,}5P - 2{,}5N \sin\alpha = 0 \; ;$$

a)



Detaliul D

b)

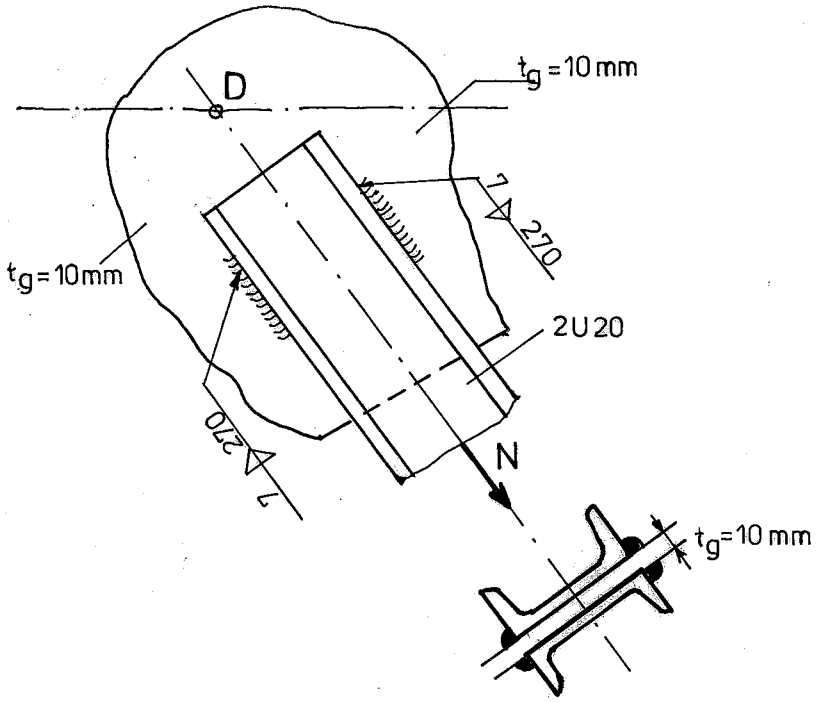


Figura 5.9.

Din figura 5.9 rezultă: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ și $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; atunci din ecuația de echilibru exprimată mai sus, se poate determina relația de legătură dintre forța P și efortul N în tirant:

$$P = \frac{2,5}{3,5} N \frac{4}{5} = 0,57N.$$

Efortul în tirant nu poate depăși capacitatea portantă a barei sudate:

$$N_{cap} = \min\left(N_{cap}^{sect}, N_{cap}^{sud}\right).$$

Din tabele (Anexele 2 și 7) se scot rezistențele de calcul și caracteristicile geometrice ale profilului:

$R = 210\,N/mm^2$; $R_f^s = 150\,N/mm^2$; $E = 2,1 \cdot 10^5\,N/mm^2$;

U20 are: $A = 32,2\,cm^2$; $t = 11,5\,mm$.

Capacitatea portantă a secțiunii barei este:

$$N_{cap}^{sect} = 2AR = (2 \cdot 32,2) \cdot 10^2 \cdot 210 \cdot 10^{-3} = 1352,4\,kN.$$

Capacitatea portantă a sudurilor este:

$$N_{cap}^{sud} = na(l_s - 2a)R_f^s = 4 \cdot 7 \cdot (270 - 2 \cdot 7) \cdot 150 \cdot 10^{-3} = 1075,2\,kN.$$

Atunci efortul capabil al tirantului, privit ca un ansamblu format din bara propriu-zisă și cordoanele de sudură, este:

$$N_{cap} = \min(1352,4; 1075,2) = 1075,2\,kN.$$

Forța capabilă a sistemului, adică valoarea maximă pe care o poate lua P astfel încât tirantul să nu cedeze, se determină din relația de legătură dintre P și N:

$$P_{cap} = 0,57N_{cap} = 0,57 \cdot 1075,2 = 612,8\,kN.$$

b).Deplasarea capetelor barei rigide se determină în ipoteza micilor deformații (figura 5.10).

Alungirea tirantului este:

$$\Delta l = \frac{1075,2 \cdot 10^3 \cdot 5000}{2,1 \cdot 10^5 \cdot (2 \cdot 32,2) \cdot 10^2} = 3,98\,mm.$$

În triunghiul CC'C" se consideră unghiul $\beta'=\beta$ și atunci:

$$\cos\beta = \frac{\Delta l}{CC'} = \frac{4}{5}, \text{ de unde } CC' = \frac{5}{4}3,94 = 4,98\,mm.$$

Din asemănarea triunghiurilor ACC' și ABB' rezultă:

$$\frac{2,5}{CC'} = \frac{3,5}{BB'} \text{ și } BB' = \frac{4,98 \cdot 3,5}{2,5} = 6,97\,mm.$$

Din asemănarea triunghiurilor ACC' și AFF" rezultă:

$$\frac{2,5}{CC'} = \frac{0,5}{FF'} \text{ și } FF' = \frac{4,98 \cdot 0,5}{2,5} = 1\,mm.$$

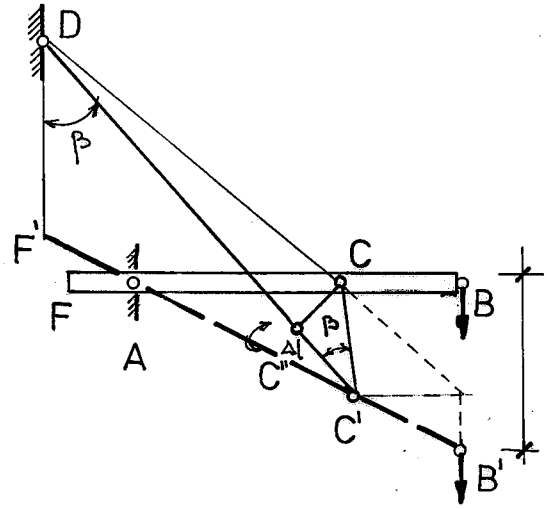


Figura 5.10.

C. TEMA LUCRĂRII

Probema 1: Să se verifice bara din figura 5.11 și prinderea sudată a acesteia știind că secțiuneă ei este alcătuită din două profile cornier, oțel OL 37.

Sudurile se execută pe ambele fețe ale unui guseu cu grosimea de 12mm. Lungimea barei este de 6 metri. Restul datelor numerice sunt date în tabelul 5.1.

Să se determine apoi deplasarea capătului barei.

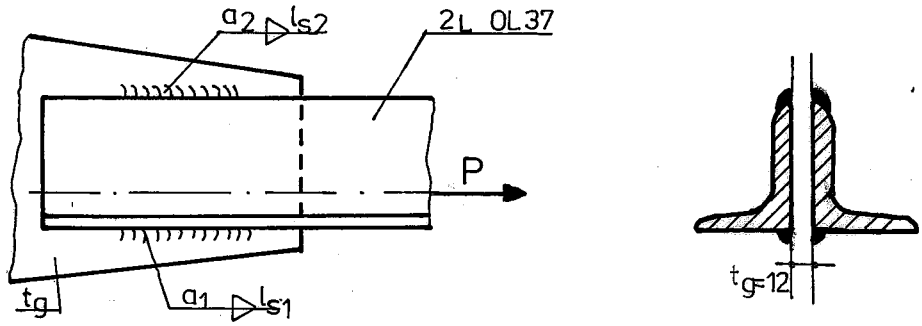


Figura 5.11.

Probema 2: Să se dimensioneze tirantul BC din figura 5.12 din două profile U - OL 37.

Să se dimensioneze apoi prinderea sudată a acestuia în nodul B pe un guseu având grosimea t_g.

Să se stabilească deplasarea pe verticală a nodului B, știind că bara AB este infinit rigidă.

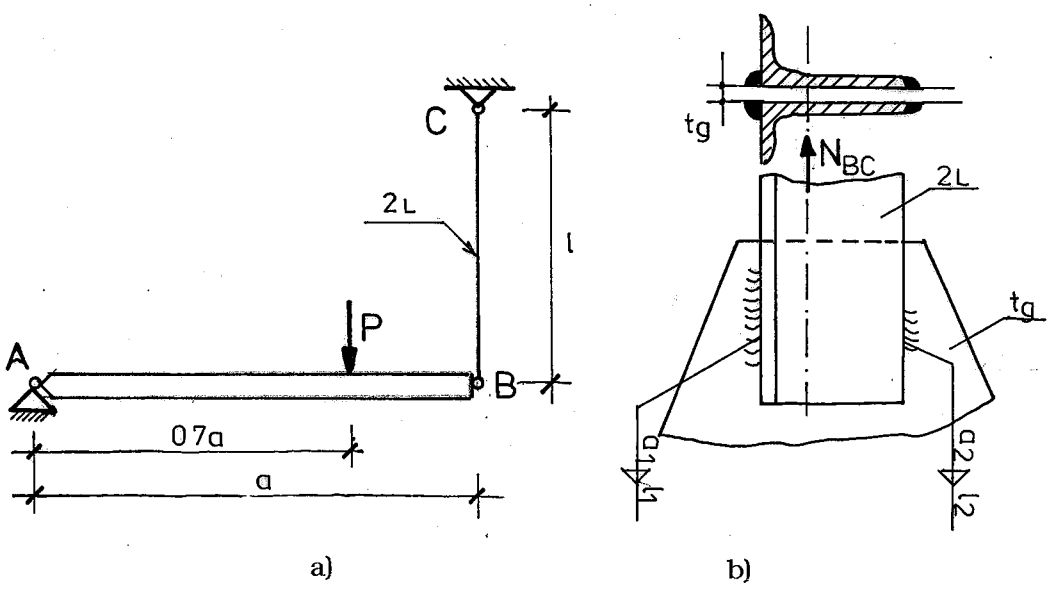


Figura 5.12.

Date numerice: $l = (8 + 0{,}2n)\,m$; $P = (3500 - 200n)\,kN$;

$t_g = \begin{matrix} 1{,}2t \ldots n = 1{,}3, \ldots 15 \\ 0{,}9t \ldots n = 2{,}4, \ldots 14 \end{matrix}$, *unde t este grosimea profilului U ales; grosimea guseului se va rotunji la multiplu de 2mm si nu se va lua mai putin de 10mm.*

Tabelul 5.1.

n	Profil cornier	P [kN]	a_1 mm	$l_{s,1}$ mm	a_2 mm	$l_{s,2}$ mm
1	L60×60×6	220	5	150	4	60
2	L70×70×7	340	5	210	4	70
3	L80×80×6	350	5	220	4	85
4	L90×90×9	600	7	210	6	110
5	L100×100×8	600	6	280	5	95
6	L70×70×8	380	6	180	5	80
7	L90×90×10	660	8	220	7	95
8	L100×100×10	730	8	270	7	100
9	L120×120×10	860	8	280	7	120
10	L150×150×14	1600	11	410	10	150
11	L100×100×12	880	10	240	8	110
12	L120×120×12	1200	10	380	8	160
13	L130×130×14	1300	11	350	9	140
14	L150×150×16	1900	13	440	11	170
15	L160×160×16	1880	13	420	11	150

Probema 3: Să se determine efortul capabil al barei din figura 5.13, având secțiune dreptunghiulară, confecționată din oțel OL 37 și prinsă cu sudură de colț de o piesă de reazem.

În bară, în afara zonei de rezemare, sunt prevăzute găuri circulare cu diametrul d, din 10 în 10 cm,pe o lungime $L = (5 + 0{,}2n)$m.

Date numerice:

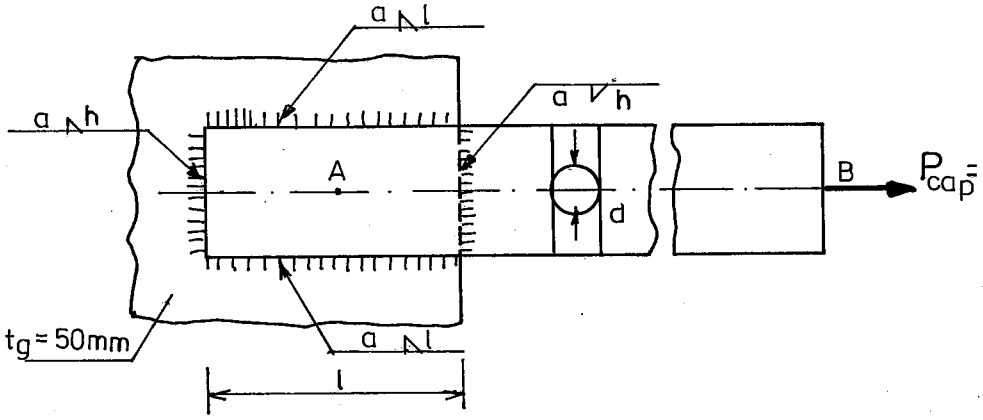
$h = (120 + 10n)$mm ;

$t = \frac{h}{4}$ *rotunjit la multiplu de 2mm* ;

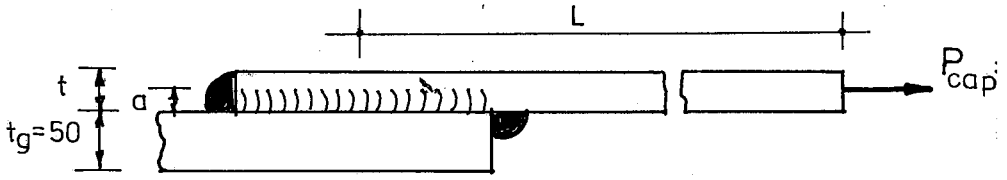
$a = 0{,}5t$ *rotunjit la multiplu de 1 mm și* $3\ mm \le a \le 0{,}7t$;

$l = 1{,}5h$ *rotunjit la multiplu de 5mm si nu mai putin decât* $l_{min} = 6a$ sau 40mm.

a) vedere de sus



b) vedere laterală



c) secțiune transversală

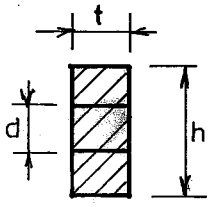


Figura 5.13.

D. TEST DE VERIFICARE A CUNOȘTINȚELOR

1. Ce tensiuni apar în secțiunile normale ale barelor supuse la întindere axială?
   a).tensiuni normale $\sigma > 0$;
   b).tensiuni normale $\sigma < 0$;

c).tensiuni tangențiale $\tau > 0$;
d).tensiuni tangențiale $\tau < 0$.

2. Ce tensiuni apar în cordoanele de sudură de colț?
   a).tensiuni normale σ;
   b).tensiuni tangențiale τ.

3. O condiție de rezistență, în metoda stărilor limită, compară:
   a).eforturile cu rezistența de calcul;
   b).tensiunile cu rezistența de calcul;
   c).tensiunile cu eforturile.

4. O condiție de rigiditate, în cazul general, compară:
   a).deplasările maxime cu deplasările admisibile;
   b).deformațiile maxime cu deformațiile admisibile;
   c).deformațiile specifice cu deformația specifică admisibilă.

5. Se dă bara din figura 5.14, având secțiune variabilă în trepte și solicitată la întindere axială de forța P. În care secțiuni se va face verificarea barei?
   a).în secțiunea A;
   b).în secțiunea B;
   c).în secțiunea C;
   d).obligatoriu în toate cele trei secțiuni.

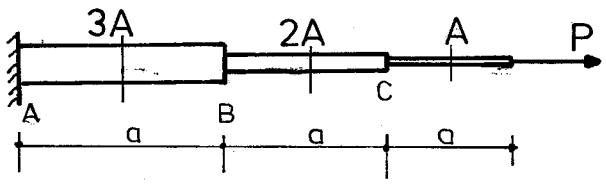


Figura 5.14.

6. Se dă bara din figura 5.15. Ce fel de problemă se poate formula?

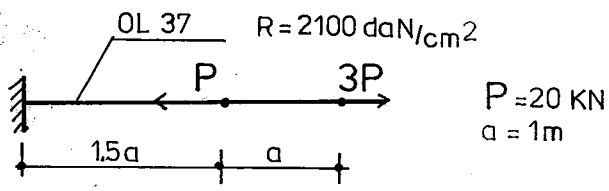


Figura 5.15.

a).de verificare;
b).de dimensionare;
c).de forță capabilă.

7. Efortul capabil al unei bare sudate este dat de:
   a).efortul capabil al secțiunii barei;
   b).efortul capabil al cordoanelor de sudură;
   c).cea mai mică valoare dintre cele două de mai sus.

8. Se dau platbenzile din figura 5.16, solidarizate printr-un cordon de sudură de colț având grosimea a = 9mm. Este corect aleasă grosimea sudurii?

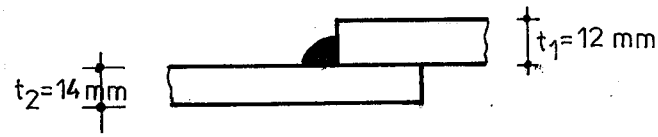
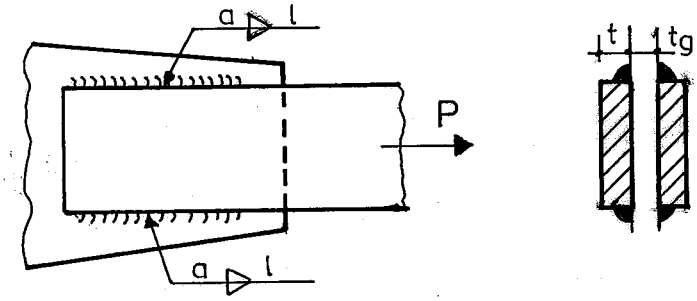


Figura 5.16.

a).corect;
b).incorect.

9. Se dă figura 5.17. Spuneți dacă relația de verificare de mai jos este scrisă corect:



$$\tau_s = \frac{P}{4al} \leq R_f^s .$$

Figura 5.17.

a).corect;
b).incorect.

10. Se cere dimensionarea sudurilor din figura 5.18. Care sunt relațiile corecte?

a). $a_1 = a_2$, $l_1 = l_2 \geq \dfrac{P}{4a_1 R_f^s}$;

b). $l_1 \geq \dfrac{P}{2a_1 R_f^s}$, $l_2 \geq \dfrac{P}{2a_2 R_f^s}$.

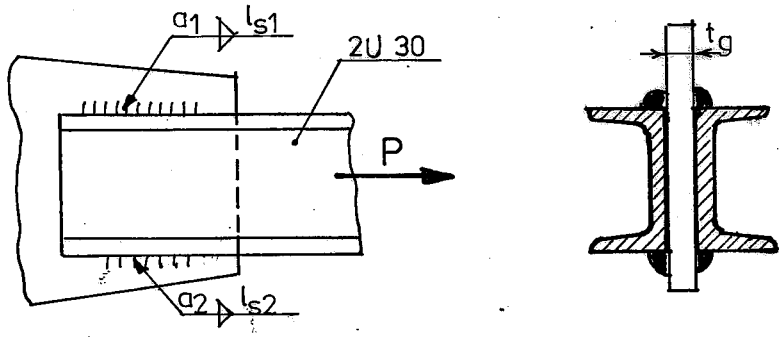


Figura 5.18.

11. Se dă profilul cornier din figura 5.19. Specificați dacă grosimea maximă a cordoanelor de sudură indicată este corectă.

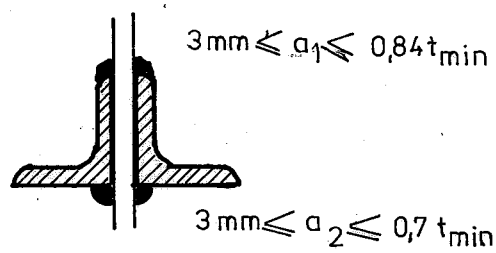


Figura 5.19.

a).corect;
b).incorect.

12. Se dă profilul cornier din figura 5.20, sudat de guseu prin două cordoane cu grosimi și lungimi egale. Poate fi făcută simultan verificarea acestor cordoane?
a).da, pentru că au arii egale;
b).nu, pentru că preiau eforturi diferite.

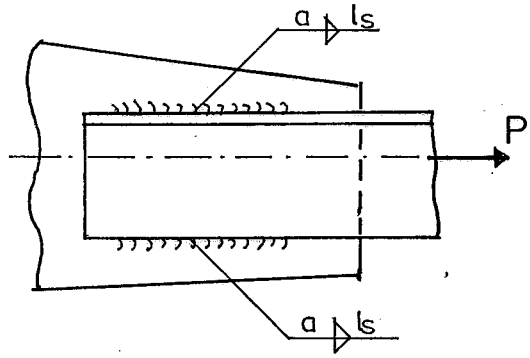


Figura 5.20.

13. Pentru bara din figura 5.21 s-au obținut următoarele rezultate:

$\sigma = 203{,}3\ \text{N/mm}^2$; $\tau_s^{sup} = 137{,}8\ \text{N/mm}^2$; $\tau_s^{inf} = 157{,}6\ \text{N/mm}^2$.

Știind că $R = 210\ \text{N/mm}^2$ și $R_f^s = 150\ \text{N/mm}^2$, decideți dacă bara sudată se rupe sau nu.

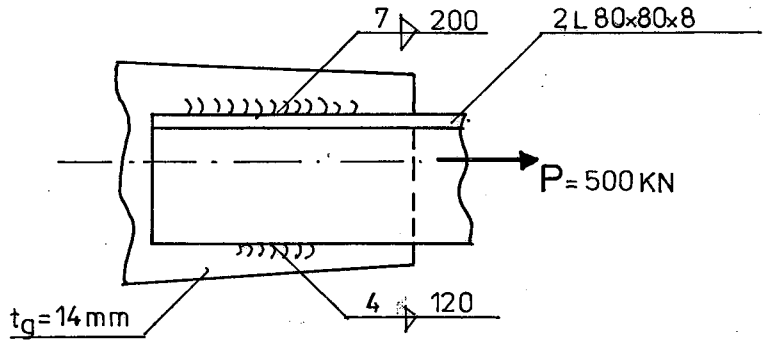


Figura 5.21.

a).bara rezistă;
b).bara cedează.

14. Pentru dimensionarea sudurilor din figura 5.22 s-au folosit următoarele relații:

(i) $3\text{mm} \le a \le 0{,}7 \cdot 8{,}5 = 5{,}95\ \text{mm}$;

(ii) aleg $a = 5\ \text{mm}$;

(iii) $l_{nec} \ge \dfrac{600 \cdot 10^3}{4 \cdot 5 \cdot 150} = 200\ \text{mm}$;

(iv) $l_s \ge 200 + 2 \cdot 5 = 210\ \text{mm}$.

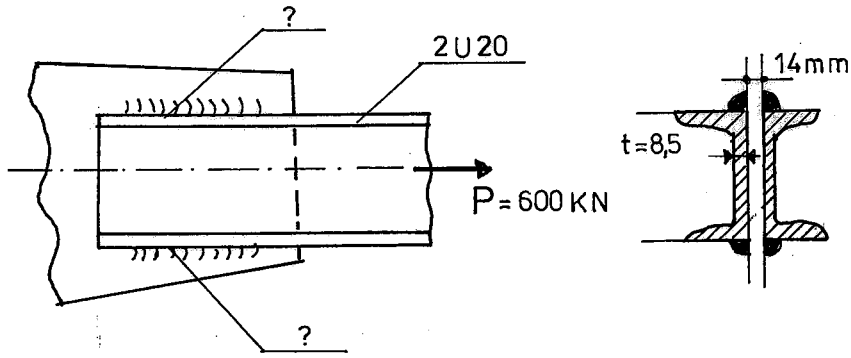


Figura 5.22.

Care dintre relațiile de mai sus este incorectă?
a).relația (i);
b).relația (ii);
c).relația (iii);
d).relația (iv).

15. Se dă bara din figura 5.23, confecționată din două profile L100×100×10 cu $A = 19{,}2\,cm^2$, $R = 210\,N/mm^2$, $R_f^s = 150\,N/mm^2$, pentru care s-au obținut următoarele rezultate: $N_{cap}^{sect} = 806{,}4\,kN$, $N_{cap}^{sud,inf} = 206{,}4\,kN$ și $N_{cap}^{sud,sup} = 495{,}6\,kN$.

Forța capabilă a barei sudate este:
a).806,4 kN;
b).206,4 kN;
c).206,4+495,6=702 kN.

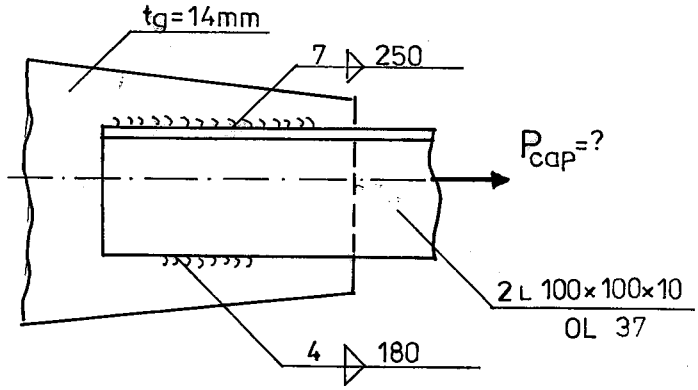


Figura 5.23.

Lucrarea 6:

BARE SOLICITATE AXIAL ÎMBINATE CU NITURI SAU ȘURUBURI

A.NOȚIUNI TEORETICE

1.Generalități

Calculul barelor îmbinate cu nituri sau cu șuruburi pleacă de la premisa că ele constituie ansambluri compuse din bara propriu-zisă și îmbinare.

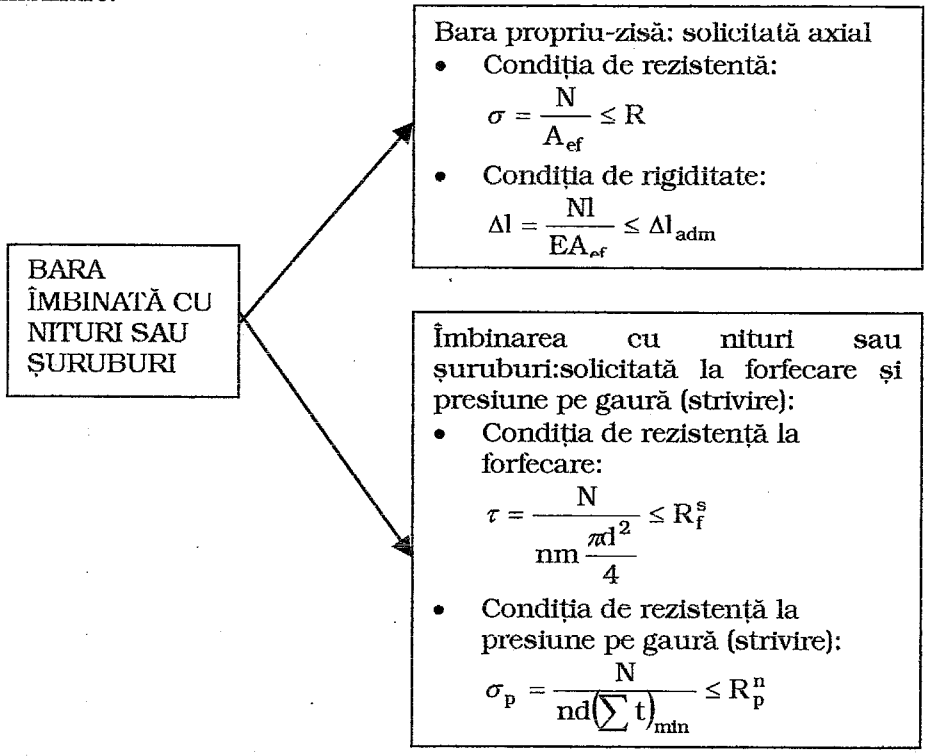

BARA ÎMBINATĂ CU NITURI SAU ȘURUBURI
Bara propriu-zisă: solicitată axial
• Condiția de rezistentă:
$\sigma = \frac{N}{A_{ef}} \le R$
• Condiția de rigiditate:
$\Delta l = \frac{Nl}{EA_{ef}} \le \Delta l_{adm}$
Îmbinarea cu nituri sau șuruburi:solicitată la forfecare și presiune pe gaură (strivire):
• Condiția de rezistență la forfecare:
$\tau = \frac{N}{nm\frac{\pi d^2}{4}} \le R_f^s$
• Condiția de rezistență la presiune pe gaură (strivire):
$\sigma_p = \frac{N}{nd(\sum t)_{min}} \le R_p^n$

Figura 6.1: Calculul barelor solidarizate cu nituri sau șuruburi.

Mărimile din relațiile de mai sus au următoarea semnificație:

- σ = tensiune normală în secțiunea barei solicitată axial;
- N = efort axial în bară;

- A_{ef} = aria secțiunii normale a barei;
- R = rezistența de calcul a materialului;
- Δl = deformație liniară absolută;
- Δl_{adm} = deformație liniară admisibilă;
- E = modulul de elsticitate longitudinal al materialului;
- n = numărul niturilor (șuruburilor) din îmbinare;
- m = numărul secțiunilor de forfecare;
- d = diametrul nitului (șurubului);
- $\left(\sum t\right)_{min}$ = grosimea minimă a pachetului de piese care se deplasează în același sens;
- τ = tensiuni tangențiale în secțiunile forfecate ale nitului (șurubului);
- σ_p = tensiuni normale pe pereții găurii;
- R_f^n = rezistența la forfecare a materialului din care este confecționat nitul (șurubul);
- R_p^n = rezistența la presiune a materialului din care este confecționat nitul (șurubul);

2.Bare solicitate axial

Calculul eforturilor, tensiunilor și deplasărilor se face conform Lucrării 5, paragraful 1.

Barele îmbinate cu nituri sau șuruburi au secțiunea slăbită datorită golurilor în care urmează să se introducă elementele de îmbinare. Efectul slăbirilor este diferit în funcție de tipul solicitării. Astfel, dacă bara este comprimată, solicitarea tinde să reducă spațiile libere dintre bară și nit până la relizarea unui contact intim între ele; efortul se transmite de la o secțiune la alta fără întrerupere și secțiunea lucrează ca și o secțiune plină.

În cazul întinderii, efectul este invers; solicitarea tinde să mărească spațiile dintre bară și elementele de îmbinare, care nu rămân în contact și astfel apar discontinuități în transmiterea eforturilor. În concluzie la cele arătate mai sus, aria efectivă introdusă în calcule se va lua:

$A_{ef} = A_{br}$ ... ... pentru bare comprimate;

$A_{ef} = A_{net} = A_{br} - A_{gol}$ ... ... pentru bare întinse.

Calculul caracteristicilor A_{br} și A_{net} este indicat în figura 6.2.

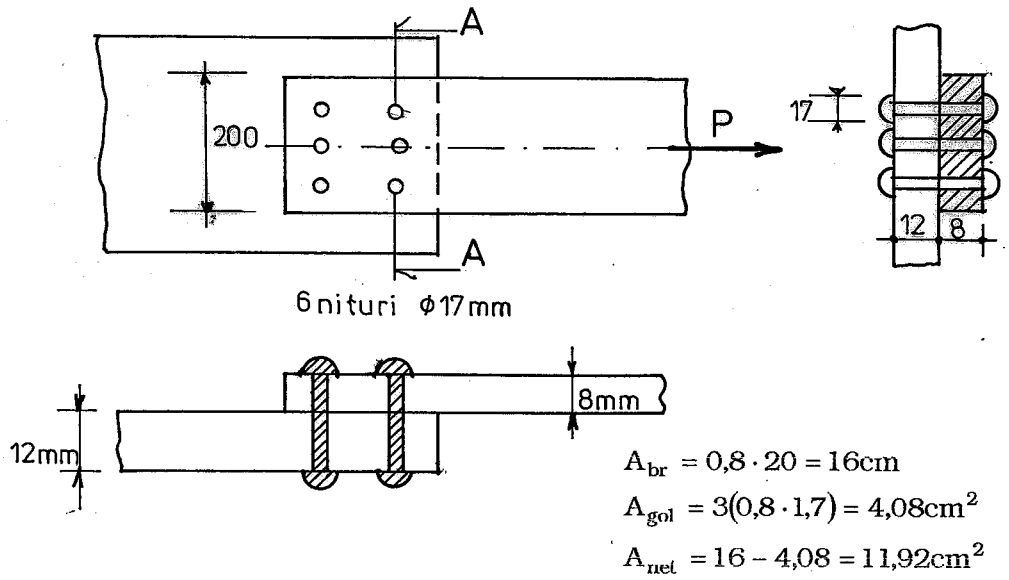


Figura 6.2. Calculul caracteristicilor A_{br} și A_{net}.

La dimensionarea barelor întinse cu slăbiri, se recomandă sporirea ariei necesare rezultate din calcul cu un coeficient $\alpha = 1,15...1,20$, în scopul de a compensa aria golurilor care, în etapa de dimensionare a secțiunii nu poate fi cunoscută cu exactitate:

$$A_{nec} \geq \alpha \frac{N}{R}.$$

După alegerea secțiunii se poate stabili diametrul nitului și se va face verificarea cu aria netă reală.

3.Îmbinări cu nituri sau cu șuruburi

Încărcările pe care le preiau niturile dintr-o îmbinare nu sunt egale; modul de lucru real al unei îmbinări este foarte complex, cu concentrări mari de tensiuni în apropierea găurilor, niturile extreme preluând un efort mai mare. Se admite, în mod simplificat, că toate niturile se încarcă uniform. Acest lucru este susținut de tendința de uniformizare a eforturilor în nituri atunci când forțele ating valorile limită (pentru care se produce fenomenul de curgere).

a).Forfecarea niturilor

Privind exemplificarea unei îmbinări nituite din figura 6.3, putem afirma că rolul nitului este de a transmite solicitarea de la grupul de piese cu tendința de deplasare într-un sens la grupul de piese cu tendința de deplasare în sens contrar. Aceasta se face prin solicitarea la forfecare a tijei nitului în planele care delimitează piese cu tendințe de deplasare diferite.

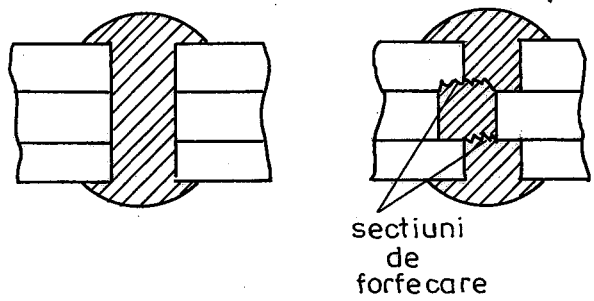


Figura 6.3. Forfecarea niturilor.

În general, dacă un nit strânge un pachet format din (m+1) piese, forfecarea apare concomitent în m secțiuni. Aria unei secțiuni de forfecare este aria tijei nitului $\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)$. Aria totală de forfecare este:

$$A_f = m\frac{\pi d^2}{4}.$$

Efortul care solicită un nit este efortul total din bară raportat la numărul de nituri din îmbinare:

$$N_1 = \frac{N}{n}.$$

Condiția de rezistență se scrie atunci:

$$\tau = \frac{N}{nm\frac{\pi d^2}{4}} \le R_f^s, \text{ unde } R_f^s = 0{,}8\,R.$$

b).Presiunea pe pereții găurii (strivirea)

Datorită efortului axial, pe pereții găurii apar presiuni; în calcule se admite în mod simplificat că aceste presiuni sunt unform ditribuite pe diametru (figura 6.4.).

În calcule se va considera cea mai mică arie pe care se produce strivire, și anume:

$$A_p = d\left(\sum t\right)_{min},$$

unde $\left(\sum t\right)_{min} = \min\left(\sum t^{dr}, \sum t^{st}\right)$, adică grosimea minimă a pachetului de piese care se deplasează într-o direcție. Conform figurii 6.4, $\left(\sum t\right)_{min} = \min(t_1 + t_3; t_2)$.

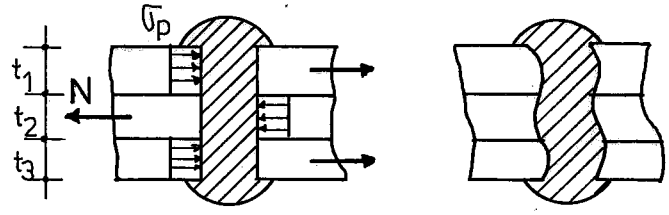


Figura 6.4. Strivirea niturilor.

În calcule se va considera cea mai mică arie pe care se produce strivire, și anume:

Condiția de rezistență devine astfel:

$$\sigma_p = \frac{N}{nd\left(\sum t\right)_{min}} \le R_p^n, \text{ unde } R_p^n = 2R.$$

4.Sinteza celor două solicitări

- VERIFICAREA

Nitul verifică numai dacă ambele condiții de rezistență sunt satisfăcute simultan.

- DIMENSIONAREA

-Se alege din tabele (Anexa 3) diametrul nitului d, funcție de dimensiunile pieselor care se îmbină.

-Se determină apoi efortul capabil al unui singur nit:

$N_{cap}^n = \min\left(N_{cap}^{n,f}, N_{cap}^{n,p}\right)$, unde

$N_{cap}^{n,f} = m\frac{\pi d^2}{4} R_f^n$, este efortul capabil al unui singur nit la forfecare și

$N_{cap}^{n,p} = d\left(\sum t\right)_{min} R_p^n$, este efortul capabil al unui singur nit la presiune pe gaură.

-Dimensioarea se reduce la calculul numărului de nituri necesar preluării efortului total din bară:

$$n_{nec} \geq \frac{N}{N_{cap}^{n}},$$

care se rotunjește la un număr întreg imediat superior.

- EFORTUL CAPABIL

Repezintă forța maximă pe care o prelua o îmbinare și este egal cu:

$$N_{cap}^{imb} = nN_{cap}^{n},$$

unde N_{cap}^{n} reprezintă efortul capabil al unui singur nit și se determină ca mai sus.

Observație: Îmbinările cu șuruburi se comportă și se calculează identic cu cele nituite. Șuruburile se notează cu litera M urmată de diametrul nominal al șurubului d în milimetri. În calcule se va introduce diametrul găurii care este cu un milimetru mai mare. De exemplu pentru un șurub M22 în calcule se va introduce d=22+1=23mm.

Alcătuirea îmbinărilor cu nituri sau șuruburi va ține seamă de distanțele prescrise de standard (Anexa 3).

B. EXEMPLE DE CALCUL

E 6.1: Să se verifice tirantul din figura 6.5, alcătuit din 2L 60×60×6, oțel OL 37, prins cu 4 șuruburi M16 de un guseu cu grosimea de 14mm. Să se verifice apoi deplasarea pe verticală a punctului C, știind că bara ABC este infinit rigidă și că deplasarea admisibilă a nodului C este 1 cm.

Rezolvare:

Determinarea efortului în tirant se face prin secționarea acestuia și introducerea efortului corespunzător în secțiunea tăiată, apoi se scrie ecuația de echilibru a barei rigide, acționată de forțele date P, q și de efortul necunoscut N din tirant:

$$\sum M_A = 0; \quad 6P - 4N + 4 \cdot 2q = 0; \quad N = \frac{6 \cdot 100 + 8 \cdot 20}{4}$$

$$N = 190\,kN.$$

Se verifică secțiunea barei supusă la întindere axială:

-pentru L 60×60×6 găsim în tabel (Anexa 5) $A = 6{,}91 cm^2$;

-pentru oțel OL 37 găsim în tabel (Anexa 2) R = 210 N/mm2;
-pentru șurub M16 se va lua d = 16+1 = 17mm.
$A_{net} = A_{br} - A_{gol} = 2(6{,}91 - 0{,}6 \cdot 1{,}7) = 11{,}78\ cm^2$;

$$\sigma = \frac{N}{A_{net}} = \frac{190 \cdot 10^3}{11{,}78 \cdot 10^2} = 161{,}3N/mm^2 < R = 210N/mm^2,$$ deci

secțiunea barei verifică condiția de rezistență.

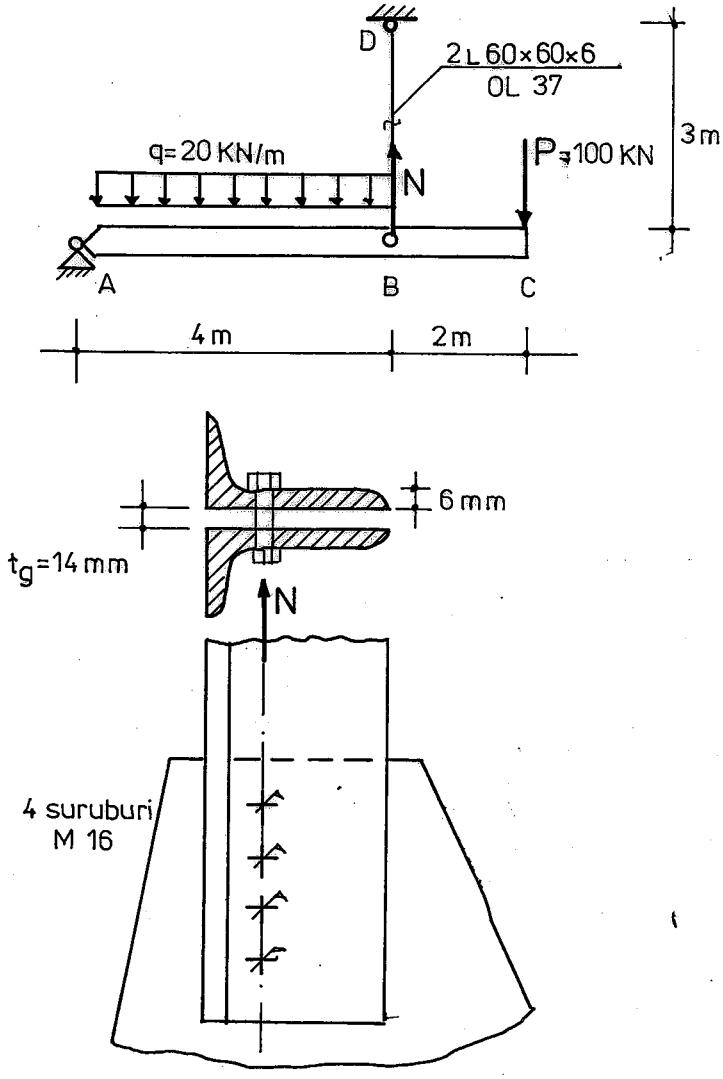


Figura 6.5.

Se verifică îmbinarea cu șuruburi:

$R_f^n = 170N/mm^2$ și $R_p^n = 420N/mm^2$

-verificarea la forfecare:

$$\tau = \frac{N}{nm\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{190\cdot 10^3}{4\cdot 2\frac{\pi\cdot 17^2}{4}} = 104{,}6N/mm^2 < R_f^n = 170N/mm^2$$

-verificarea la presiune pe gaură (strivire):

$$\sigma_p = \frac{N}{nd\left(\sum t\right)_{min}} = \frac{190\cdot 10^3}{4\cdot 17\cdot 14} = 199{,}6N/mm^2 < R_p^n = 420N/mm^2$$

deci îmbinarea verifică condițiile de rezistență.

În concluzie, se poate afirma că bara îmbinată cu șuruburi rezistă.

Pentru determinarea deplasării pe verticală a punctului C (figura 6.6.), se va calcula mai întâi alungirea tirantului Δl:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{190\cdot 10^3\cdot 3000}{2{,}1\cdot 10^5(2\cdot 6{,}91)\cdot 1\Theta^2} = 1{,}96\ mm,$$

unde $E = 2{,}1\cdot 10^5\ N/mm^2$ pentru oțelul OL 37 s-a scos din tabel (Anexa 4):

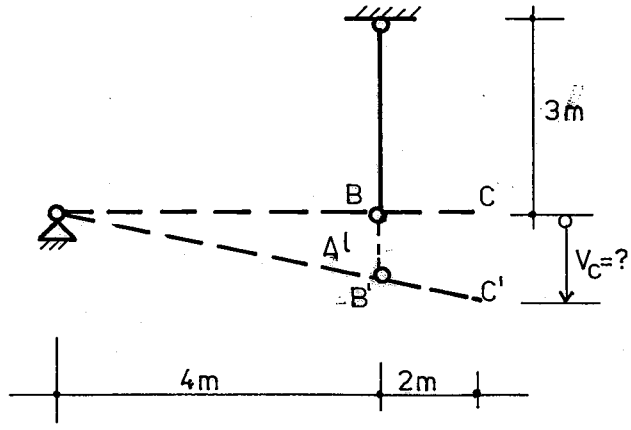


Figura 6.6.

Din asemănarea triunghiurilor ABB' șiACC' rezultă:

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{4}{6} \quad \text{de unde} \quad CC' = \frac{6 \cdot \Delta l}{4} = \frac{6 \cdot 1{,}96}{4} = 2{,}95 \text{ mm.}$$

deci deplasarea pe verticală a nodului C este mai mică decât 1 cm, valoarea deplasării admisibile.

E 6.2: Se dă platbanda din figura 6.7, îmbinată cu eclise și solidarizată cu nituri așezate pe două rânduri. Să se dimensioneze platbanda, eclisele și îmbinarea, știind că ele se execută din oțel OL 37 și piesa este întinsă axial de o forță P = 400kN.

Rezolvare:

$$R = 210 N / mm^2$$

Pentru oțelul OL 37 se scot din tabel (Anexa 2) $R_f^n = 170 N / mm^2$.

$$R_p^n = 420 N / mm^2$$

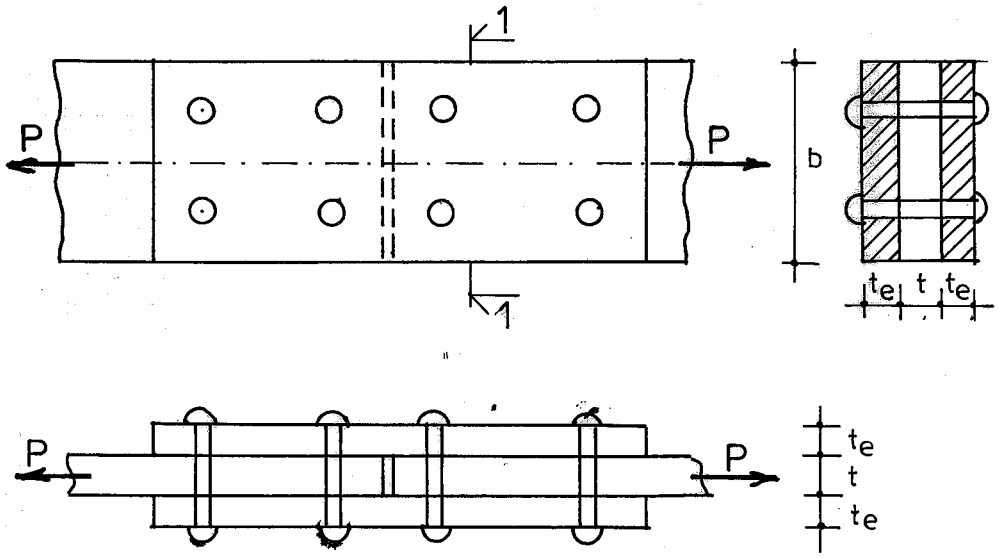


Figura 6.7.

Transmiterea efortului se face de la bară la eclise prin intermediul niturilor de pe o jumătate din îmbinare, apoi procesul are loc invers, adică de la eclise la bară prin intermediul niturilor de pe cealaltă jumătate a îmbinării. Deci secțiunea barei, secțiunea celor două eclise și jumătate din numărul de nituri din îmbinare, trebuie fiecare să preia efortul din piesă.

Alegem lățimea platbandei și a ecliselor suficient de mare pentru a încape două nituri; fie b = 200mm.

Dimensionarea platbandei se face ca și bară întinsă cu slăbiri:

$$A_{nec} \geq 1{,}15\frac{N}{R} = 1{,}15\frac{400\cdot 10^3}{210} = 2190\ mm^2;$$

$$t_{nec} \geq \frac{A_{nec}}{b} = \frac{2190}{200} = 10{,}95\ mm.$$

Aleg platbandă de 200 × 12mm.

Pentru eclise aleg două platbande de 200 × 6mm (din condiția ca $A_{ecl} \geq \frac{A_{nec}}{2}$).

Aleg diametrul nitului din tabel (Anexa---) în funcție de grosimile platbandelor care se îmbină: d = 13mm.

Verificarea platbandei (secțiunea barei):

$$A_{net} = 20\cdot 1{,}2 - 2(1{,}2\cdot 1{,}3) = 20{,}88\ cm2;$$

$$\sigma = \frac{400\cdot 10^3}{20{,}88\cdot 10^2} = 191{,}6N/mm^2 < R = 210N/mm^2.$$

Verificarea ecliselor nu mai este necesară deoarece ele au aceeași arie netă ca și secțiunea barei.

Dimensionarea îmbinării cu nituri de 13mm diametru:

-efortul capabil al unui nit la forfecare:

$$N_{cap}^{n,f} = 2\frac{\pi\cdot 13^2}{4}170\cdot 10^{-3} = 45{,}1\ kN;$$

-efortul capabil al unui nit la presiune pe gaură:

$$N_{cap}^{n.p} = 13\cdot 12\cdot 420\cdot 10^{-3} = 65{,}5\ kN,$$

unde $\left(\sum t\right)_{min} = \min(12{,}6+6) = 12\ mm.$

-efortul capabil al unui nit:

$$N_{cap}^{n} = \min(45{,}1;65{,}5) = 45{,}1\ kN.$$

-numărul de nituri necesare pe o jumătate de îmbinare:

$$n_{nec} \geq \frac{400}{45{,}1} = 8{,}87\ nituri.$$

Deci, în îmbinare se vor dispune 20 de nituri de 13mm, câte 10 pe fiecare parte.

E 6.3: Se dă bara din figura 6.8, confecționată din 2 profile U20-OL 37, prinsă nituit la un capăt cu 5 nituri de 23mm și sudat la celălalt capăt cu cordoane de sudură de colț având grosimea de 5mm și lungimea de 240mm. Grosimea guseelor la ambele capete este de 14mm. Să se determine efortul capabil al barei astfel îmbinate.

Rezolvare:

Pentru profilul U20, din tabel (Anexa 7), avem: $A = 32{,}2\text{cm}^2$; $t = 8{,}5\text{mm}$.
Pentru oțelul OL 37, din tabel (Anexa 2), avem: $R = 210\,\text{N/mm}^2$;

$$R_f^n = 170\,\text{N/mm}^2;\quad R_p^n = 420\,\text{N/mm}^2;\quad R_f^s = 150\,\text{N/mm}^2.$$

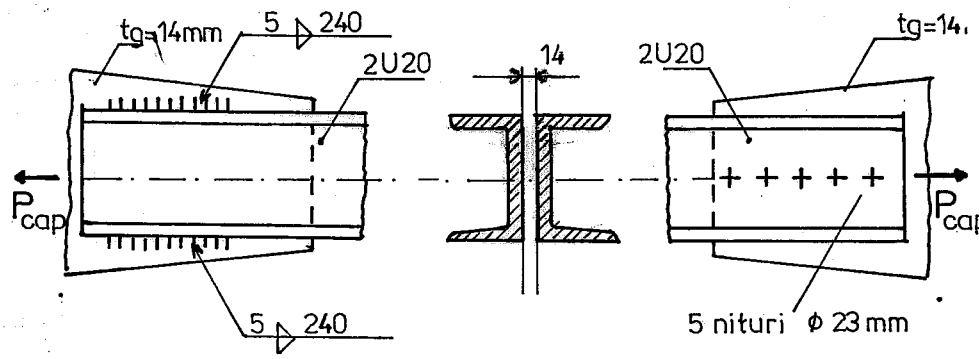


Figura 6.8.

Efortul capabil al secțiunii barei se determină în zona nituită, unde apar slăbirile:

$$A_{net} = 2(32{,}2 - 0{,}85 \cdot 2{,}3) = 60{,}49\,\text{cm2},$$

$$N_{cap}^{sect} = 60{,}49 \cdot 10^2 \cdot 210 \cdot 10^{-3} = 1270{,}3\,\text{kN}.$$

Efortul capabil al îmbinării nituite:

$$N_{cap}^{n.f} = 2\frac{\pi \cdot 23^2}{4} \cdot 170 \cdot 10^{-3} = 141{,}2\text{kN}$$

$$N_{cap}^{n.p} = 23 \cdot 14 \cdot 420 \cdot 10^{-3} = 135{,}2\text{kN}$$

$$\text{unde} \left(\sum t\right)_{min} = \min(14;2 \cdot 8{,}5) = 14\text{mm}$$

$$N_{cap}^{n} = \min(141{,}2;135{,}2) = 135{,}2\text{kN}$$

$$N_{cap}^{imb} = 5 \cdot 135{,}2 = 676\text{kN}$$

Efortul capabil al sudurii:

$$N_{cap}^{sud} = n \cdot a \cdot l_s \cdot R_f^s = 4 \cdot 5 \cdot (240 - 2 \cdot 5) \cdot 150 \cdot 10^{-3} = 690\,\text{kN}.$$

Efortul capabil al barei îmbinată cu sudură la un capăt și cu nituri la celălalt este:

$$P_{cap} = \min\left(N_{cap}^{sect}; N_{cap}^{imb}; N_{cap}^{sud}\right) = \min(1270,2;676;690)$$

$$P_{cap} = 676kN.$$

C. TEMA LUCRĂRII

Problema 6.1: Să se dimensioneze bara din figura 6.9, confecționată din 2 profile cornier, oțel OL 37, îmbinată cu șuruburi. Grosimea guseului este 14 mm, iar bara este solicitată la întindere axială de o forță concentrată P = (50+100n) kN. Să se determine apoi deplasarea maximă a capătului liber, știind că lungimea barei este de 6 metri.

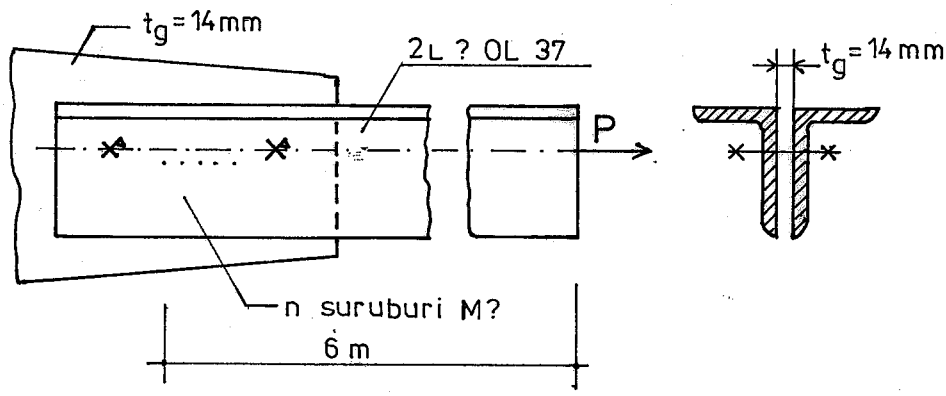


Figura 6.9.

Problema 6.2: Să se verifice barele sistemului din figura 6.10, alcătuite din două profile U, oțel OL 37, solicitate de forța P = (4000 - 200n) kN. Barele sunt prinse nituit pe un guseu cu grosimea t_g, niturile fiind dispuse pe două rânduri. Pentru alegerea diametrului nitului se va folosi tabelul 6.1. Să se dimensioneze îmbunarea cu nituri și să se determine apoi deplasarea pe verticală a nodului C. Datele numerice se vor lua din tabelul 6.2.

Tabelul 6.1.

h [mm]	≥ 140	≥ 160	≥ 180	≥ 200	≥ 220	≥ 240
d_{max} [mm]	13	17	21	23	25	28

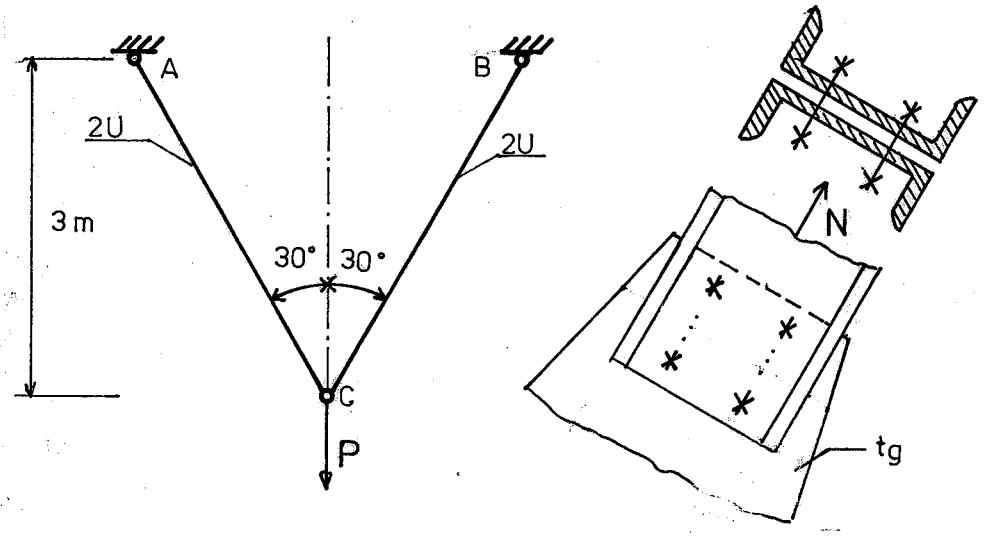


Figura 6.10.

Tabelul 6.2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
t_g [mm]	16	16	16	16	16	14	14	14	12	12	12	12	10	10	10
Profil	U30		U30		U26		U24		U22		U20		U16		U14

Problema 6.3: Să se stabilească încărcarea capabilă pentru bara din figura 6.11, îmbinată nituit cu eclise. Bara este confecționată din oțel OL 37. Datele numerice se vor lua din tabelul 6.3, n_n reprezentând numărul de nituri de pe o jumătate de îmbinare.

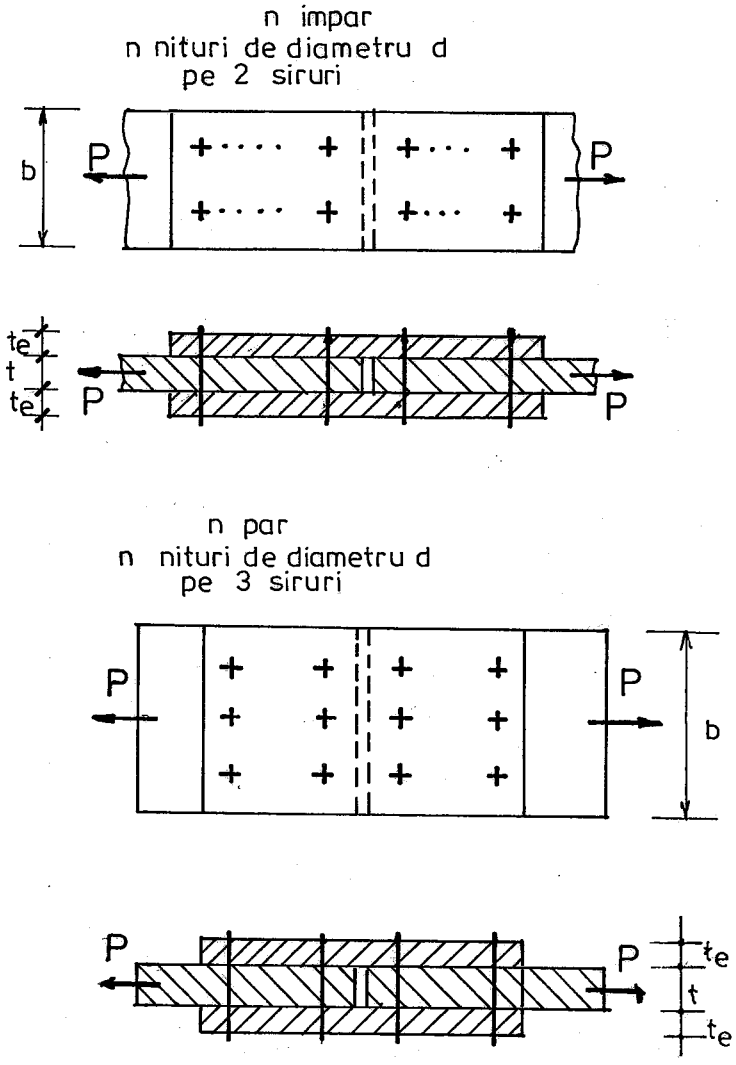


Figura 6.11.

Tabelul 6.3.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
d	15	17	19	21	23	25	28	13	15	17	19	21	23	25	28
n_n	4	6	4	9	6	9	4	6	6	9	6	6	4	6	6

b = 8d... pentru n par, (se va rotunji în sus la multiplu de
=12d...pentru n impar 10 mm);

$t = \left(0{,}4 + \frac{n}{45}\right)d$, (se va rotunji în sus la multiplu de 1mm);

$t_{ecl} = 1{,}55\ t$, (se va rotunji în sus la multiplu de 1mm).

D. TEST DE VERIFICARE A CUNOȘTINȚELOR

1. Niturile și șuruburile sunt solicitate la:
   a).efort axial;
   b).forfecare;
   c).presiune pe gaură.

2. Fie bara solidarizată cu nituri din figura 6.12. În care secțiune a ei se va face verificarea?

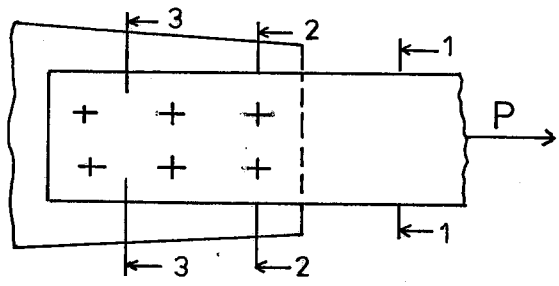


Figura 6.12.

   a).în secțiunea 1-1 (bara fără solidarizări);
   b).în sectiunea 2-2 (în dreptul primului șir de nituri);
   c).în secțiunea 3-3 (între două șiruri de nituri.

3. În care dintre situațiile de mai jos se ține cont de slăbirile barei?
   a).la determinarea numărului de nituri din îmbinare;
   b).la verificarea barelor comprimate;
   c).la dimensionarea barelor întinse.

4. Se dă bara din figura 6.13, îmbinată cu șuruburi. Care dintre relațiile următoare este corectă?
   a). $A_{net} = 2(20 \cdot 1 - 2 \cdot 2{,}1 \cdot 1)$;
   b). $A_{net} = 2(20 \cdot 1 - 3 \cdot 2{,}0 \cdot 1)$;
   c). $A_{net} = 2(20 \cdot 1 - 3 \cdot 2{,}1 \cdot 1)$.

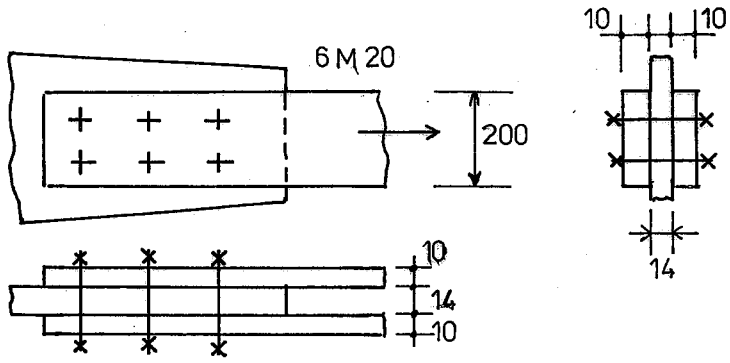


Figura 6.13.

5. Care este diferența între calculul îmbinărilor nituite și al celor cu șuruburi?
   a).nici una, calculul se face identic;
   b).calculul se face identic, cu excepția faptului că la verificarea barei se folosește $d_s = d + 1mm$;
   c).calculul se face identic, folosindu-se în toate relațiile diamerul da calcul al șurubului egal cu diametrul nominal plus 1mm.

6. Care este semnificația notației M20?
   a).șurub păsuit având diametrul nominal 20mm;
   b).șurub păsuit având diametrul de calcul 21mm;
   c).șurub brut având diametrul nominal 20mm.

7. La calculul îmbinărilor nituite și cu șuruburi se admite că toate niturile/șuruburile din îmbinare se încarcă în mod egal. Este corectă această afirmație?
   a).este corectă;
   b).este o ipoteză simplificatoare.

8. Forfecarea niturilor se produce:
   a).în toată tija niturilor;
   b).la nivelul secțiunilor de contact dintre piesele care se îmbină;
   c).într-o singură secțiune de contact corespunzătoare pieselor celor mai solicitate.

9. Se dă nitul din figura 6.14, având diametrul de 17mm și $R_p^n = 420\,kN/mm^2$. Specificați care dintre relațiile de mai jos reprezintă capacitatea portantă a nitului la presiune pe gaură?

a). $N_{cap}^{n.p} = 17 \cdot 10 \cdot 420 \cdot 10^{-3} = 71{,}4\,kN$;

b). $N_{cap}^{n.p} = 17 \cdot 26 \cdot 420 \cdot 10^{-3} = 185{,}6\,kN$;

c). $N_{cap}^{n.p} = 17 \cdot 16 \cdot 420 \cdot 10^{-3} = 114{,}2\,kN$.

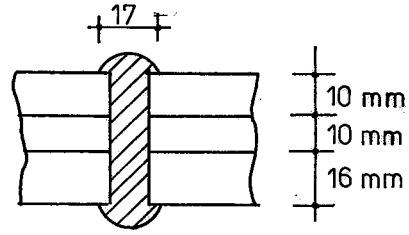


Figura 6.14.

10. Diametrul nitului sau șurubului:
    a).se dimensionează funcție de mărimea efortului axial din bară;
    b).se alege din tabel funcție de forma și dimensiunile secțiunii transversale;
    c).se dimensionează funcție de mărimea forței tăietoare din tija nitului.

11. Verificarea unei bare nituite presupune:
    a).verificarea tensiunilor normale în bară;
    b).verificarea tensiunilor tangențale din forfecare în tija nitului;
    c).verificarea tensiunilor normale pe pereții găurilor.

12. Dimensionarea unei îmbinări nituite presupune:
    a).determinarea prin calcul a diametrului nitului;
    b).determinarea numărului de niturі din îmbinare;
    c).determinarea efortului capabil al unui nit.

13. Pentru bara din figura 6.15, având secțiunea alcătuită din două profile U20 (A = 32,2cm^2; t = 8,5mm), oțel OL 37, îmbinată cu 5 niturі de 23mm pe un guseu cu grosimea de 14mm, s-au obținut următoarele rezultate:

$N_{cap}^{sect} = A_{net}R = 1270{,}3\,kN$; $N_{cap}^{n.f} = 141{,}2\,kN$; $N_{cap}^{n.p} = 135{,}2\,kN$.

Cu cât va fi egală forța capabilă P_{cap} a barei nituite?

a).P_{cap} = 1270,3kN;

b).$P_{cap} = 5 \cdot 141{,}2 = 706\,kN$;

c).$P_{cap} = 5 \cdot 135{,}2 = 676\,kN$.

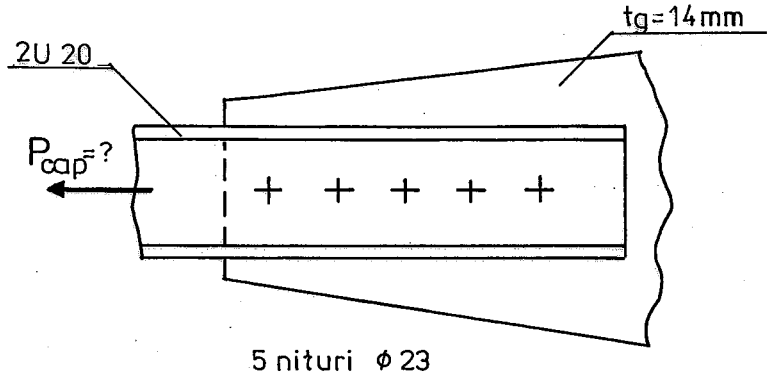


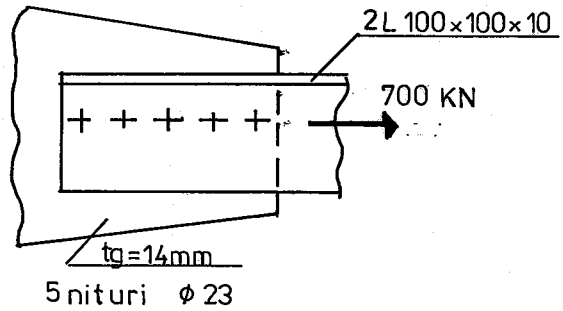
Figura 6.15.

14. O bară este îmbinată cu 5 șuruburi M 20, având eforturile capabile $N_{cap}^{n.f} = 117{,}6\,kN$ și $N_{cap}^{n.p} = 123{,}4\,kN$. Bara este solicitată la întindere axială de o forță P = 500kN. Decideți dacă bara rezistă. Explicați.
    a).da, bara rezistă;
    b).nu, bara nu rezistă.

15. Verificarea barei din figura 6.16, confecționată din două profile cornirer 100×100×10 (A=19,20cm^2), îmbinată cu 5 nituri de 23mm pe un guseu cu grosimea de 14mm, solicitată la întindere de forța P=700kN, a condus la următoarele rezultate:

$$\sigma = \frac{N}{A_{net}} = 207{,}1\,N/mm^2;\ \tau = 168{,}5\,N/mm^2;\ \sigma_p = 434{,}8\,N/mm^2.$$

Decideți dacă bara nituită rezistă sau nu. Explicați.
    a).da, bara rezistă;
    b).nu, bara cedează prin... ... .



$R = 210\,N/mm^2$
$R_f^n = 170\,N/mm^2$
$R_p^n = 420\,N/mm^2$

Figura 6.16.

Lucrarea 7:

CARACTERISTICI GEOMETRICE ALE SECȚIUNILOR PLANE

A.NOȚIUNI TEORETICE

1.Generalități

Caracteristicile geometrice sunt mărimi care depind numai de forma și dimensiunile secțiunii transversale a barei, fiind independente de lungimea ei, valorile și poziția încărcărilor exterioare, condițiile de rezemare ale barei și calitatea materialului. Aceste mărimi depind însă de sistemul de axe ales pe secțiunea transversală.

În raport cu un sistem de axe ortogonale cu centrul într-un punct arbitrar O, sunt definite următoarele mărimi (figura 7.1):

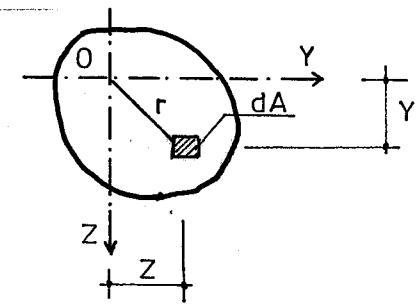


Figura 7.1. Definirea principalelor caracteristici geometrice.

- $A = \int_A dA$, este aria secțiunii transversale a barei;
- $S_y = \int_A z \cdot dA$ și $S_z = \int_A y \cdot dA$, sunt momentele statice ale secțiunii în raport cu axele Oy, respectiv Oz;
- $I_y = \int_A z^2 dA$ și $I_z = \int_A y^2 dA$, sunt momentele de inerție axiale ale secțiunii în raport cu axele Oy și Oz;
- $I_{yz} = \int_A yz \cdot dA$, este momentul de inerție centrifugal al secțiunii;
- $I_p = \int_A r^2 dA = \int_A \left(y^2 + z^2\right) dA = I_y + I_z$, este momentul de inerție polar.

Sistemul de axe ales pe secțiune va fi întotdeauna *sistem central* (adică va avea originea O în centrul de greutate al secțiunii) și *principal* (adică axele Oy și Oz sunt axe principale de inerție sau, altfel spus, momentele de inerție axiale vor avea pe aceste direcții valori extreme-maxim, respectiv minim- iar momentul de inerție centrifugal este nul).

În aceste condiții, sunt important de reținut următoarele consecințe:

- momentele statice sunt nule în raport cu o axă centrală;
- momentul de inerție centrifugal I_{yz} este nul în raport cu axele principale;
- dacă secțiunea are o axă de simetrie, aceasta va fi atât o axă centrală cât și una principală.

2.Calculul practic al caracteristicilor geometrice

a).Determinarea coordonatelor centrului de greutate al secțiunii

Poziția centrului de greutate este cunoscută în cazul figurilor geometrice simple (dreptunghi, triunghi) sau este tabelată pentru profilele laminate.

În cazul secțiunilor cu o geometrie complexă (figura 7.2), determinarea poziției centrului de greutate presupune următoarele etape de calcul:

- se alege un sistem de axe arbitrar y'O'z';
- se împarte secțiunea în mai multe secțiuni simple A_i, pentru care sunt cunoscute ariile și poziția centrelor de greutate; fie y_i' și z_i' coordonatele centrului de greutate al ariei A_i în raport cu sistemul y'O'z';
- coordonatele centrului de greutate al întregii secțiuni se determină cu relațiile:

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot z_i'}{\sum_{i=1}^{n} A_i}; \qquad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_i'}{\sum_{i=1}^{n} A_i}; \qquad \text{unde } \sum_{i=1}^{n} A_i = A \text{ repezintă}$$

aria întregii secțiuni.

Observații:

- *coordonatele y_i' și z_i' se introduc cu semnele lor;*
- *coordonatele centrului de greutate al secțiunii, y_G și z_G, rezultă cu semn. Dacă semnul este pozitiv, ele se măsoară în sensul pozitiv al axelor de coordonate.*

- *Dacă secțiunea are o axă de simetrie, centrul ei de greutate se va găsi pe ea; rămâne deci de calculat o singură coordonată care va da poziția centrului de greutate pe axa de simetrie.*

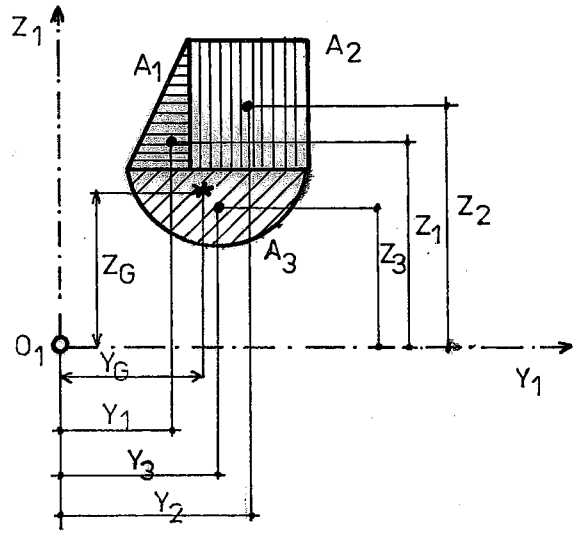


Figura 7.2. Determinarea coordonatelor centrului de greutate

b).Calculul momentelor de inerție

Pentru secțiuni simple, în raport cu axele centrale principale proprii:

- Dreptunghi (figura 7.3,a): $I_y = \frac{bh^3}{12}$; $I_z = \frac{b^3h}{12}$.
- Cerc (figura 7.3,b): $I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64}$; $I_p = \frac{\pi D^4}{32}$.

a).dreptunghi b).cerc

Figura 7.3. Momente de inerție pentru secțiuni simple.

Pentru profile laminate, momentele de inerție în raport cu axele centrale principale proprii sunt tabelate (Anexele 5, 6 și 7).

Pentru secțiunile compuse (figura 7.4), calculul momentelor de inerție axiale se face în raport cu sistemul central principal al secțiunii (yOz). În raport cu acest sistem, etapele de calcul sunt următoarele:

- Se descompune secțiunea în figuri geometrice simple, pentru care se cunoaște: - aria (A_i);
  -poziția centrului de greutate propriu G_i (care are, în sistemul global de axe yOz coordonatele y_i și z_i) ;
  -momentele de inerție (I_{y_i}, I_{z_i}) în raport cu axele centrale principale proprii (y_iOz_i);
- Momentele de inerție axiale ale secțiunii se determină cu formula lui Steiner:

$$I_y = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{y_i} + A_i \cdot z_i^2\right) \quad \text{și} \quad I_z = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{z_i} + A_i \cdot y_i^2\right).$$

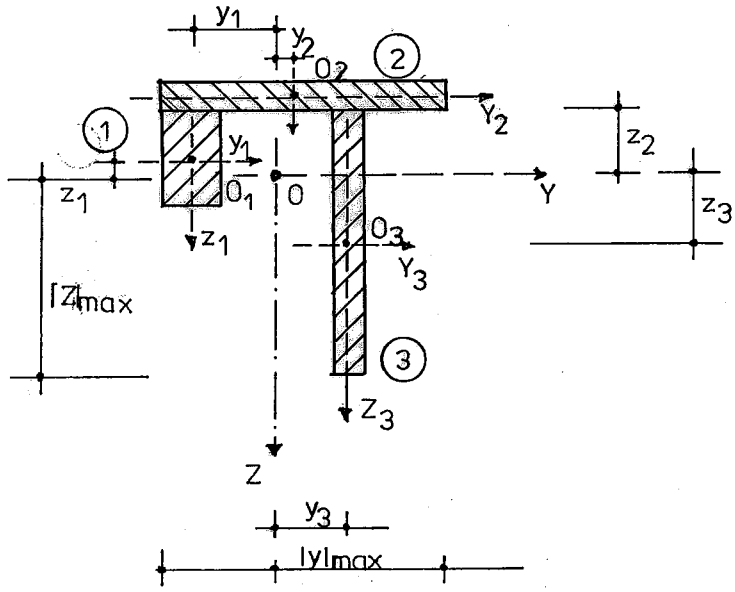


Figura 7.4. Calculul momentelor de inerție principale pentru secțiuni compuse.

c).Calculul modulului de rezistență

Modulul de rezistență (figura 7.4) se definește ca raportul:

$$W_y = \frac{I_y}{|z|_{max}}; \quad W_z = \frac{I_z}{|y|_{max}},$$

unde $|z|_{max}$ și $|y|_{max}$ reprezintă distanțele - pe direcțiile axelor de coordonate - măsurate de la centrul de greutate al secțiunii la fibrele extreme ale acesteia.

d) Calculul momentelor statice

Calculul momentelor statice ale unei arii în raport cu axele centrale principale (figura 7.4) se face astfel:

- Se descompune secțiunea în figuri geometrice simple, pentru care se cunoaște: - aria (A_i);
  -poziția centrului de greutate propriu G_i (care are, în sistemul global de axe yOz coordonatele y_i și z_i) ;
- Momentele statice ale secțiunii se determină cu relațiile:

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot z_i \quad \text{și} \quad S_z = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_i .$$

Observații:

- *Momentul static al ariei de deasupra axei neutre este egal cu momentul static al ariei de dedesubtul axei neutre ;*
- *Momentele statice ale întregii secțiuni în raport cu axele centrale sunt nule.*

Unități de măsură:

- Aria se măsoară în unități de lungime la puterea a doua [L^2], de regulă mm^2 sau cm^2;
- Momentele de inerție se măsoară în unități de lungime la puterea a patra [L^4], de regulă cm^4;
- Momentele statice se măsoară în unități de lungime la puterea a treia [L^3], de regulă cm^3;
- Modulul de rezistență se măsoară în unități de lungime la puterea a treia [L^3], de regulă cm^3.

B. EXEMPLE DE CALCUL

E 6.1: Să se determine caracteristicile geometrice ale secțiunii din figura7.5.

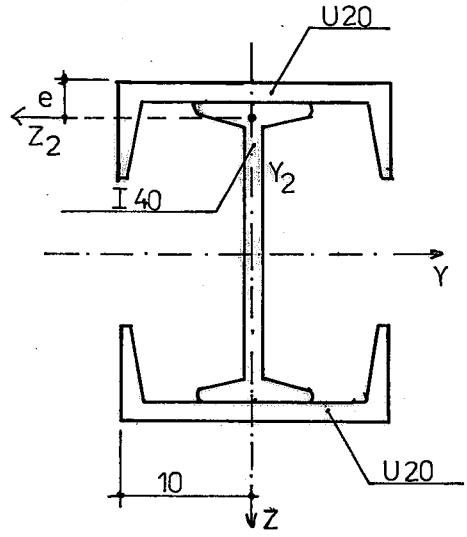


Figura 7.5.

Rezolvare:

Secțiunea are două axe de simetrie, deci centrul ei de greutate se va găsi la intersecția lor. Din tabele (Anexa 6 și 7) s-au scos caracteristicile geometrice ale profilelor în raport cu axele proprii:

-profil I 40: $A_I = 118\,cm^2$; $I_{y_1} = 29210\,cm^4$; $I_{z_1} = 1160\,cm^4$; $d = 1{,}44\,cm$; $S_o = 857\,cm^3$;

-profil U20: $A_U = 32{,}2\,cm^2$; $I_{y_1} = 1910\,cm^4$; $I_{z_1} = 148\,cm^4$; $b = 7{,}5\,cm$; $d = 8{,}5\,mm$; $e = 2{,}01\,cm$;

- Aria: $A = A_I + A_U = 118 + 2 \cdot 32{,}2 = 182{,}4\,cm^2$.

- Momente de inerție axiale:

$$I_y = 29210 + 2\left[148 + 32{,}2 \cdot \left(\frac{40}{2} + 0{,}85 - 2{,}01\right)^2\right] = 52364{,}5\,cm^4$$

$$I_z = 1160 + 2 \cdot 1910 = 4980\,cm^4.$$

- Module de rezistență:

$$W_y = \frac{I_y}{|z|_{max}} = \frac{52364,5}{(20+0,85)} = 2511,5\,cm^3;$$

$$W_z = \frac{I_z}{|y|_{max}} = \frac{4980}{10} = 498\,cm^3.$$

- Moment static al jumătății de secțiune în raport cu axa neutră Oy:

$$S_o = 857 + 32,2 \cdot \left(\frac{40}{2} + 0,85 - 2,01\right) = 1463,6\,cm^3.$$

E 6.2: Să se determine caracteristicile geometrice ale secțiunii din figura 7.6.

Rezolvare:

Din tabel (Anexa 7) se extrag caracteristicile geometrice ale profilului U10 în raport cu axele principale proprii:

$A = 13,5\,cm^2$; $I_{y_1} = 205\,cm^4$; $I_{z_1} = 29,3\,cm^4$; $e = 1,55\,cm$; $d = 6\,mm$.

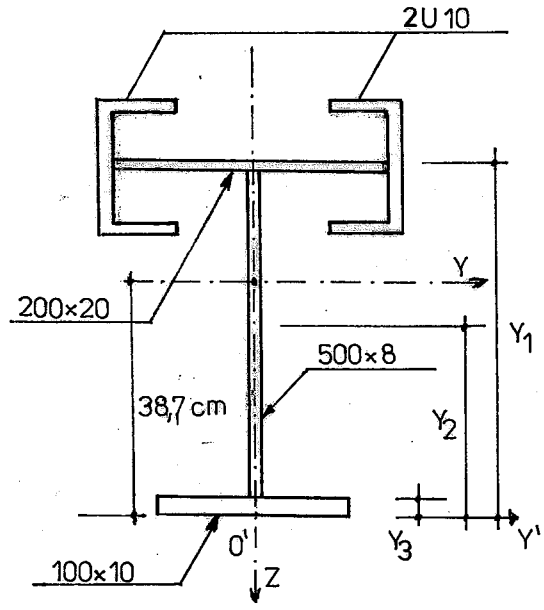


Figura7.6.

Secțiunea are axa verticală Oz axă de simetrie, deci centrul de greutate al secțiunii se va găsi pe ea și, totodată va fi și axă principală.

- Aria: $A = 10 \cdot 1 + 50 \cdot 0{,}8 + 20 \cdot 2 + 2 \cdot 13{,}5 = 117\,cm^2$.
- Pentru determinarea poziției centrului de greutate al secțiunii se alege axa arbitrară O'y' la fibra inferioară a secțiunii. Secțiunea se consideră compusă din trei platbande și două profile U10.

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{5} A_i z_i'}{A} = \frac{10 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 50 \cdot 0{,}8 \cdot 26 + 20 \cdot 2 \cdot 52 + 2 \cdot 13{,}5 \cdot 52}{117}$$

$z_G = 38{,}7\,cm.$

- Determinarea momentelor de inerție axiale:

$$I_y = \frac{10 \cdot 1^3}{12} + 10 \cdot 1 \cdot (38{,}7 - 0{,}5)^2 + \frac{0{,}8 \cdot 50^3}{12} + 50 \cdot 0{,}8 \cdot$$

$$(38{,}7 - 1 - 25)^2 + \frac{20 \cdot 2^3}{12} + 20 \cdot 2 \cdot (50 + 1 - 38{,}7)^2 +$$

$$+ 2 \cdot \left[205 + 13{,}5 \cdot (50 + 1 - 38{,}7)^2\right] = 39938 cm^4$$

$$I_z = \frac{1 \cdot 10^3}{12} + \frac{50 \cdot 0{,}8^3}{12} + \frac{2 \cdot 20^3}{12} + 2\left[29{,}3 + 13{,}5(10 + 0{,}6 - 1{,}55)^2\right] =$$

$$= 3405{,}2 cm^4.$$

- Determinarea modulelor de rezistență:

$$W_y = \frac{39938}{38{,}7} = 1032\,cm^3; \quad W_z = \frac{3405{,}3}{10 + 0{,}6} = 321{,}2\,cm^3.$$

- Determinarea momentelor statice:

-momentul static al tălpii inferioare:

$$S_{t.inf} = 10 \cdot 1 \cdot 38{,}2 = 382\,cm^3;$$

-momentul static al ariei de sub axa neutră:

$$S_o = 382 + 0{,}8 \cdot 37{,}7 \cdot \frac{37{,}7}{2} = 950{,}5\,cm^3.$$

C. TEMA LUCRĂRII

Pentru secțiunile din figura 7.7, să se determine următoarele caracteristici geometrice:

a) Aria;

b) Momentele de inerție principale;

a) Modulele de rezistență;
b) Momentul static al tălpii inferioare și al ariei de sub axa neutră.
Profilele se vor lua conform tabelului 7.1.

Date numerice:

$h_i = (30g + 30n + 120)$mm;
$b = h_i/3$ rotunjit la multiplu de 20mm;
$t = b/5$ rotunjit la multiplu de 2mm;
t_i = 8mm ... ... pentru semigrupa A,
6mm ... ... pentru semigrupa B.

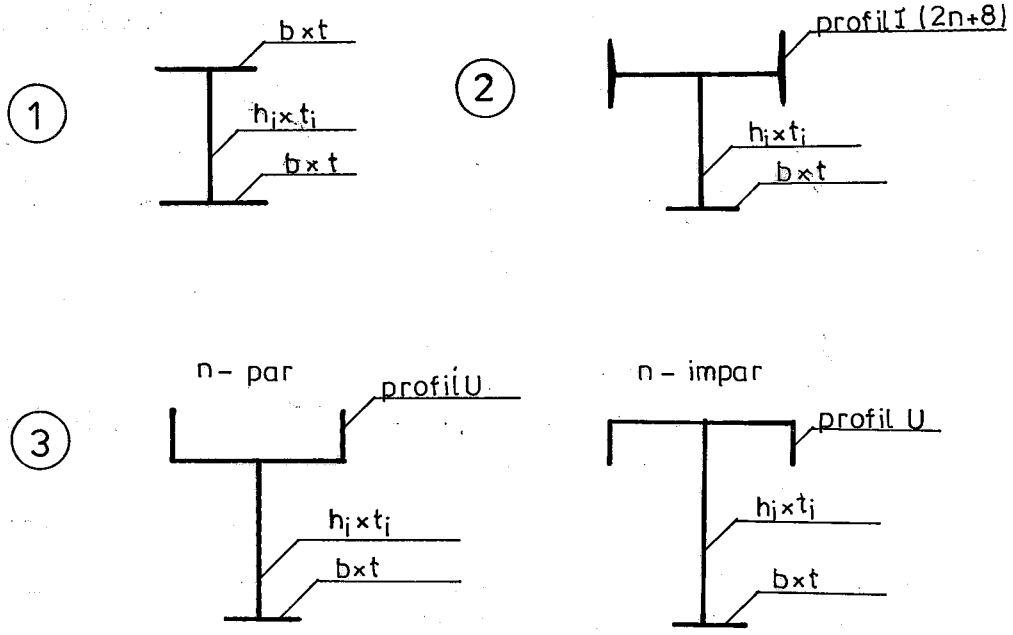


Figura 7.7.

Tabelul 7.1.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
profil	U16		U18		U20		U22		U24		U26		U30		U10

D. TEST DE VERIFICARE A CUNOȘTINȚELOR

1. Care dintre mărimile de mai jos nu fac parte din categoria caracteristicilor geometrice?
   a).aria barei;
   b).lungimea barei;
   c).momentul de inerție.

2. Care dintre mărimile de mai jos sunt influențate de alegerea sistemului de axe de coordonate?
   a).momentul de inerție axial;
   b).momentul de inerție centrifugal;
   c).modulul de rezistență.

3. Fie o secțiune simetrică în raport cu axa verticală. Cum se alege sistemul de axe principale?
   a).cu originea O la jumătatea înălțimii secțiunii, axa Oz coincide cu axa de simetrie și axa Oy perpendiculară pe ea;
   b).cu originea în centrul de greutate al secțiunii, axele Oy si Oz arbitrare;
   c).cu originea în centrul de greutate al secțiunii, axa Oz coincide cu axa de simetrie și axa Oy prpendiculară pe ea.

4. În care dintre situațiile de mai jos, valoarea momentelor de inerție nu se modifică?
   a).la translația sistemului de axe;
   b).la rotirea sistemului de axe;
   c).la translația unei singure axe.

5. Se dau secțiunile din figura 7.8. Care dintre afirmațiile de mai jos sunt corecte?

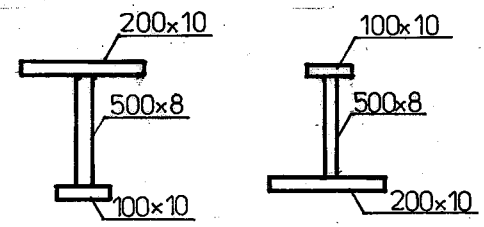


Figura 7.8.

a).$A_1 = A_2$;
b).$I_{y1} = I_{y2}$;
c).$W_y = W_{y2}$.

6. Se dau secțiunile din figura 7.9. Care dintre afirmațiile de mai jos sunt corecte?

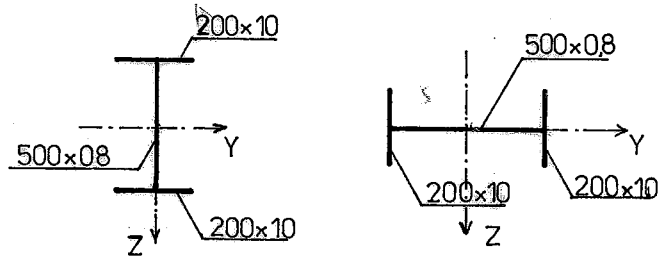


Figura 7.9.

a). $A_1 = A_2$;
b). $I_{y1}=I_{y2}$;
c). $W_{y1}=W_{y2}$.

7. Se dă secțiunea de mai jos compusă din două profile I, caracteristicile unui profil fiind cele din figura 7.10. Decideți care dintre următoarele afirmații sunt false?

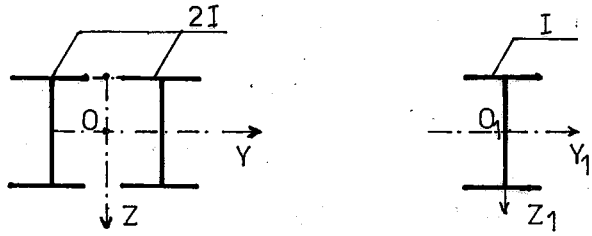


Figura 7.10.

a). $A = 2A_1$;
b). $I_y = 2I_{y1}$;
c). $I_z = 2I_{z1}$.

8. Se dă secțiunea din figura 7.11. Care dintre relațiile de mai jos reprezintă coordonata corectă a centrului de greutate al acestei secțiuni?

a). $Z_G = \dfrac{30 \cdot 2 \cdot 1 + 60 \cdot 1 \cdot 32}{120} = 16{,}5\,\text{cm}$;

b). $z_G \dfrac{30 \cdot 2 \cdot 31}{120} = 15{,}5\ \text{cm}$;

c). $z_G = \dfrac{-30 \cdot 2 \cdot 1 + 60 \cdot 1 \cdot 30}{120} = 14{,}5\,\text{cm}$.

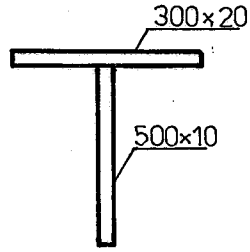


Figura 7.11.

9. Pentru secțiunea din figura 7.12 se dau trei variante de calcul a momentului de inerție. Decideți care este corectă?

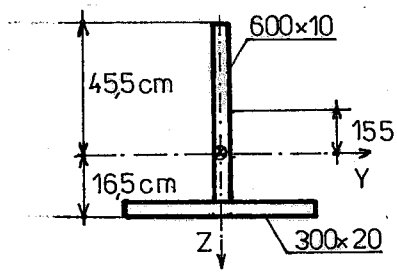


Figura 7.12.

$$\text{a).}\ I_y = \frac{1\cdot 60^3}{12} + 1\cdot 60\cdot 15{,}5^2 + \frac{2\cdot 30^3}{12} + 2\cdot 30\cdot 15{,}5^2;$$

$$\text{b).}\ I_y = \frac{1\cdot 60^3}{12} + 1\cdot 60\cdot 15{,}5^2 + \frac{30\cdot 2^3}{12} + 2\cdot 30\cdot 15{,}5^2;$$

$$\text{c).}\ I_y = \frac{1^3\cdot 60}{12} + 1\cdot 60\cdot 15{,}5^2 + \frac{2\cdot 30^3}{12} + 2\cdot 30\cdot 15{,}5^2.$$

10. Secțiunea din figura 7.13 are Iy = 46850cm^4. Cu cât va fi egal modulul de rezistență al acestei secțiuni?

a). $W_y = \frac{46850}{16{,}5} = 2839{,}4\ \text{cm}^3$;

b). $W_y = \frac{46850}{45{,}5} = 1029{,}6\ \text{cm}^3$.

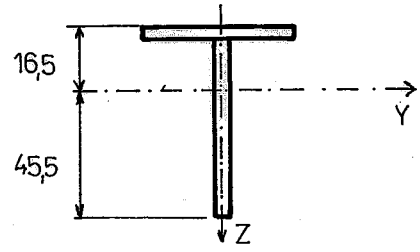
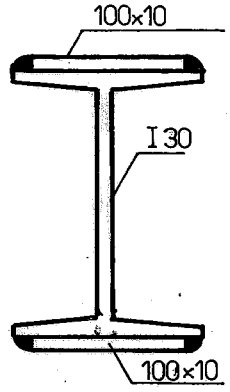


Figura 7.13.

11. Profilului I30 din figura 7.14 i se sudează pe tălpi câte o platbandă de 100x10mm. Cu cât va crește momentul de inerție I_y al acestei secțiuni față de momentul de inerție al profilului?



$A = 691\,cm^2$

$I_{y1} = 9800\,cm^4$

$I_{z1} = 451\,cm^4$

Figura 7.14.

a).cu $2\frac{10 \cdot 1^3}{12}cm^4$;

b). cu $2(\frac{10 \cdot 1^3}{12} + 10 \cdot 1 \cdot 16^2)cm^4$;

c).nu se modifică.

12. Cu cât va crește momentul de inerție I_z al secțiunii din figura 7.14 față de momentul de inerție al profilului I30 ?

a).cu $2\frac{10^3 \cdot 1}{12}cm^4$;

b).cu $2(\frac{10^3 \cdot 1}{12} + 10 \cdot 1 \cdot 16^2)cm^4$;

c).nu se modifică.

13. Cum trebuie așezate două profile I, astfel încât să obținem un moment de inerție I_y cât mai mare?

a) alaturat b) suprapus

Figura 7.15.

a).alăturat;
b).suprapus.

14. Cum trebuie așezate două profile I, astfel încât să obținem un modul de rezistență W_y cât mai mare?
a).alăturat;
b).suprapus.

15. Cum trebuie așezate două profile I, astfel încât să obținem un moment de inerție I_z cât mai mare?
a).alăturat;
b).suprapus.

Lucrarea 8:

ÎNCOVOIEREA SIMPLĂ A GRINZILOR

A.NOȚIUNI TEORETICE

1.Eforturi

Se numește ***încovoiere pură*** acea solicitare care produce într-o secțiune a barei numai moment încovoietor orientate după una dintre axele principale ale secțiunii (de exemplu $M_y=M\neq0$), restul eforturilor fiind nule ($T_y=T_z=0$; $M_z=0$; $N=0$).

Se numește ***încovoiere simplă*** sau ***încovoiere cu lunecare*** acea solicitare care produce în secțiunile barei un moment încovoietor dirijat după una dintre axele principale ale secțiunii (de exemplu $M_y=M\neq0$) și o forță tăietoare perpendiculară pe acest moment (dirijată deci după cealaltă axă primcipală a secțiunii $T_z=T\neq0$); restul eforturilor sunt nule.

Încovoierea simplă apare în cazul barelor drepte cu secțiune simetrică, încărcate în planul lor de simetrie (figura 8.1).

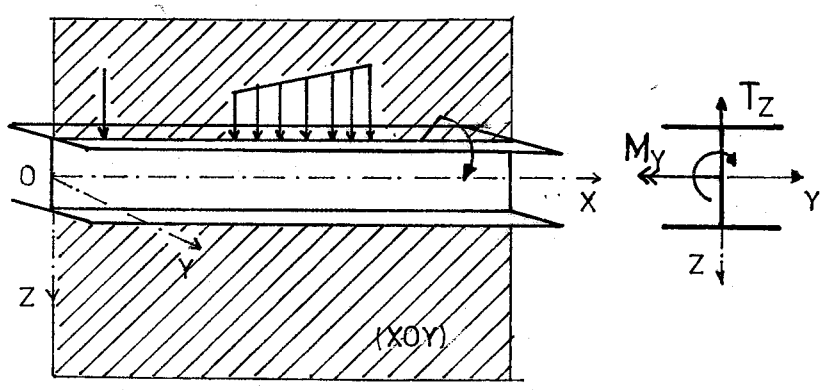


Figura 8.1. Eforturi în grinda supusă la încovoiere simplă.

Barele supuse la încovoiere simplă poartă denumirea generică de ***grinzi***. În cele ce urmează se va trata încovoierea simplă a grinzilor drepte, static determinate, încărcate cu forțe paralele cu axa Oz și situate în planul de simetrie al barei (xOz).

Calculul eforturilor, semnele lor și trasarea diagramelor de eforturi, a fost tratată pe larg în Lucrările 2 și 3.

2.Tensiuni

În secțiunile grinzilor supuse la încovoiere simplă apar tensiuni normale σ (produse de momentul încovoietor M) și tensiuni tangențiale τ (produse de forța tăietoare T).

a).Tensiuni normale

Tensiunile normale într-un punct curent al secțiunii barei se determină cu formula lui Navier:

$$\sigma = \frac{M}{I_y} \cdot z,$$

unde: M-valoarea momentului încovoietor în secțiune (se ia cu semnul corespunzător din diagrama de momente);
I_y-momentul de inerție principal (modul de calcul a fost prezentat în Lucrarea 7);
z -ordonata punctului în care se calculează tensiunea (se va lua cu semnul corespunzător poziției punctului).

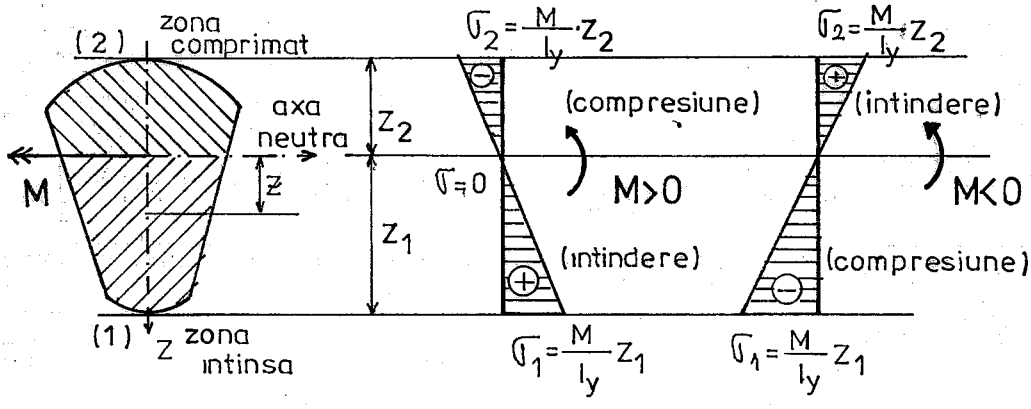


Figura 8.2. Tensiuni normale în bara încovoiată.

Tensiunile normale variază în lungul axei barei, funcție de mărimea momentului încovoietor M și variază liniar, proporțional cu ordonata z, pe înălțimea secțiunii (figura 8.2). Axa centrală și principală Oy este axa neutră a secțiunii, adică, în orice punct al secțiunii aflat pe această axă tensiunile normale sunt nule.

Axa neutră împarte secțiunea în două zone: una pe care se produc tensiuni normale de întindere ($\sigma > 0$) și alta pa care se produc tensiuni normale de compresiune ($\sigma < 0$). Poziția reciprocă acestor zone – deasupra sau dedesubtul axei neutre – depinde de semnul momentului încovoietor

din secțiune. Astfel, dacă momentul este M >0, zona întinsă se găsește sub axa neutră iar zona comprimată este deasupra axei neutre.

Valorile extreme (maxime/minime) ale tensinilor normale pe secțiune se produc în fibrele extreme (superioară/inferioară). Valoarea maximă absolută se poate calcula cu relația:

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M|}{W_y},$$

unde $W_y = \frac{I_y}{|z|_{max}}$ este modulul de rezistență al secțiunii, cu

$|z|_{max} = \max(z_1, z_2)$, adică ordonata celei mai îndepărtate fibre față de axa neutră (figura 8.2).

Putem spune, în concluzie, că tensiunile normale extreme se produc în fibra extremă (cea mai îndepărtată de axa neutră) din secțiunea maxim solicitată a barei (unde se produce $|M|_{max}$).

b).Tensiuni tangențiale

Tensiunile tangențiale într-un punct curent al secțiunii barei se determină cu formula lui Jurawsky:

$$\tau = \frac{T}{b \cdot I_y} S_{y,\Omega},$$

unde: T – forța tăietoare din secțiune (se ia cu semnul corespunzător din diagrama de eforturi);
I_y– momentul de inerție al secțiunii în raport cu axa neutră;
b – lățimea secțiunii la nivelul ordonatei z corespunzătoare punctului unde se determină τ;
S_y-momentul static al "secțiunii care lunecă" în raport cu axa neutră Oy.

Observație: Dacă prin punctul de ordonată z se duce o dreaptă paralelă cu axa neutră Oy, această dreaptă împarte secțiunea în două părți; unei asemenea părți de secțiune I se spune "secțiune care lunecă" în raport cu cealaltă parte (figura 8.3).

Tensiunile tangențiale τ variază parabolic pe sectiune și în lungul axei barei funcție de mărimea forțelor tăietoare T.

Într-o secțiune, tensiunile tangențiale sunt maxime în axa neutră și nule în fibrele extreme. Valoarea maximă a tensiunilor tangențiale care se

produc în bară apare în axa neutră din secțiunea unde forța tăietoare T este maximă în valoare absolută.

Tensiunile tangențiale τ au același sens cu forța tăietoare din secțiune.

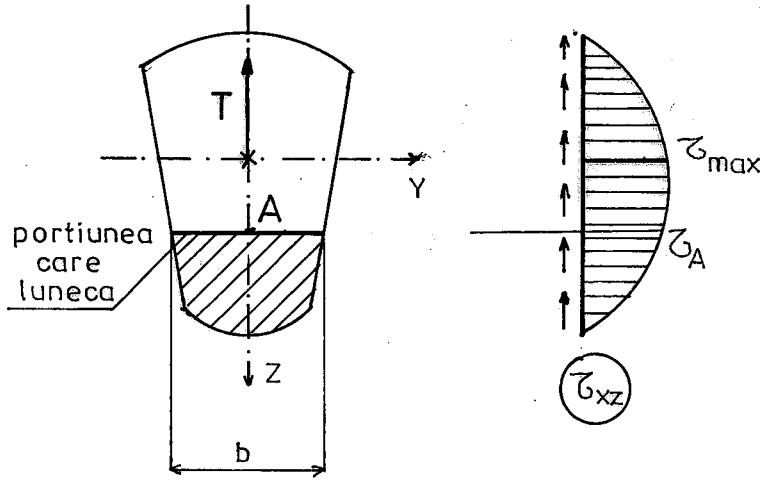


Figura 8.3. Tensiuni tangențiale la barele încovoiate.

Pentru secțiunile cu variații bruște ale lățimii – de tipul secțiunilor T sau I laminate sau sudate – se vor înregistra discontinuități în diagrama tensiunilor tangențiale τ în punctele de contact dintre tălpi și inimă.

3.Condiții de rezistență și calculul grinzilor încovoiate

- VERIFICAREA

Condiția de rezistență în tensiuni normale σ se pune în fibra extremă cea mai depărtată de axa neutră din secțiunea cu moment maxim în valoare absolută:

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M|_{max}}{W_y} \leq R,$$ unde R este rezistența de calcul a materialului.

Condiția de rezistență în tensiuni tangențiale τ se pune în axa neutră a secțiunii unde forța tăietoare este maximă în valoare absolută:

$\tau_{max} = \frac{|T|_{max}}{b \cdot I_y} S_{y,O} \leq R_f$, unde $S_{y,O}$ este momentul static al uneia dintre cele două porțiuni de secțiune separate de axa neutră și R_f este rezistența la forfecare a materialului.

Grinda verifică numai dacă ambele condiții de rezistență sunt satisfăcute simultan. Secțiunea unde se produce momentul maxim – și se verifică σ - este, în general diferită de secțiunea unde se produce forța tăietoare maximă și, deci unde se verifică τ.

Valorile rezistențelor de calcul care intervin în relații se scot din tabele (Anexa 2).

Observație: în general, condiția de rezistență în tensiuni normale σ este mai severă decât cea în tensiuni tangențiale τ. De aceea, pentru grinzi cu dechideri, secțiuni și încărcări obișnuite, satisfacerea condiției de rezistență de către σ atrage după sine și satisfacerea condiției de rezistență în τ.

- DIMENSIONAREA

Pentru dimensionare se folosește numai condiția de rezistență în σ, din care se calculează modulul de rezistență minim necesar al secțiunii barei:

$$W_{y,nec} \geq \frac{|M|_{max}}{R}.$$

Pe baza acestuia se calculează sau se scot din tabele (Anxele 5, 6, 7) dimensiunile secțiunii. După aceasta se face verificarea tensiunilor normale și tangențiale folosind dimensiunile efective (alese) ale barei.

- EFORTUL CAPABIL

Momentul maxim pe care îl poate prelua o secțiune nu depinde de încărcări, ci numai de carateristicile geometrice și mecanice ale barei. Din condiția de rezistență în σ rezultă:

$$M_{cap} = W_y R.$$

În practică este importantă cunoașterea forței maxime care poate fi aplicată barei cu o schemă de încărcare dată. Aceasta se poate face, pe cazuri particulare, egalând momentul maxim în valoare absolută din diagramă cu momentul capabil al secțiunii barei.

Din această ecuație se determină valoarea forței maxime pe care o poate prelua secțiunea barei în condiții de siguranță; această forță se numește ***forță capabilă.***

B. EXEMPLE DE CALCUL

E 6.1: Să se verifice grinda din figura 8.4, având secțiunea în formă de T alcătuit din platbande sudate din oțel OL 37. Să se traseze apoi diagramele tensiunilor σ și τ în secțiunile cu eforturi maxime.

Rezolvare:

Etape de calcul la verificarea grinzilor:

- Trasarea diagramelor de eforturi T și M prin metoda directă; stabilirea secțiunilor unde se produc eforturile extreme și valorile lor $|T|_{max}$ și $|M|_{max}$.

Observație: în această etapă se lucrează pe grindă.

- Calculul caracteristicilor geometrice ale secțiunii: I_y, W_y, S_y.

Observație: în această etapă se lucrază pe secțiune.

- Verificarea condițiilor de rezistență în secțiunile cu eforturi maxime.

Trasarea diagramelor de eforturi se face direct, pe baza consecințelor relațiilor diferențiale între încărcări și eforturi (figura 8.4.c). Reacțiunile barei sunt:

$$\sum M_A = 0:$$

$$5V_B - 100 \cdot 6 - 40 \cdot 5 \cdot 2{,}5 + 50 + \frac{1}{2} 60 \cdot 1{,}5 \cdot 1 = 0; \quad V_B = 201 \text{ kN}.$$

$$\sum M_B = 0:$$

$$5V_A - 50 - \frac{1}{2} 60 \cdot 1{,}5 \cdot 6 - 40 \cdot 5 \cdot 2{,}5 + 100 \cdot 1 = 0; \quad V_A = 144 \text{ kN}.$$

Verificarea reacțiunilor:

$$\sum Z = 0; \qquad \frac{1}{2} 60 \cdot 1{,}5 + 40 \cdot 5 + 100 - 201 - 144 = 0.$$

Valorile forțelor tăietoare în secțiunile caracteristice:

$$T_A^{st} = -\frac{1}{2}60 \cdot 1{,}5 = 45\,\text{kN}; \quad T_A^{dr} = -45 + 144 = 99\,\text{kN};$$

$$T_B^{st} = 99 - 40 \cdot 5 = -101\,\text{kN}; \quad T_B^{dr} = -101 + 201 = 100\,\text{kN}.$$

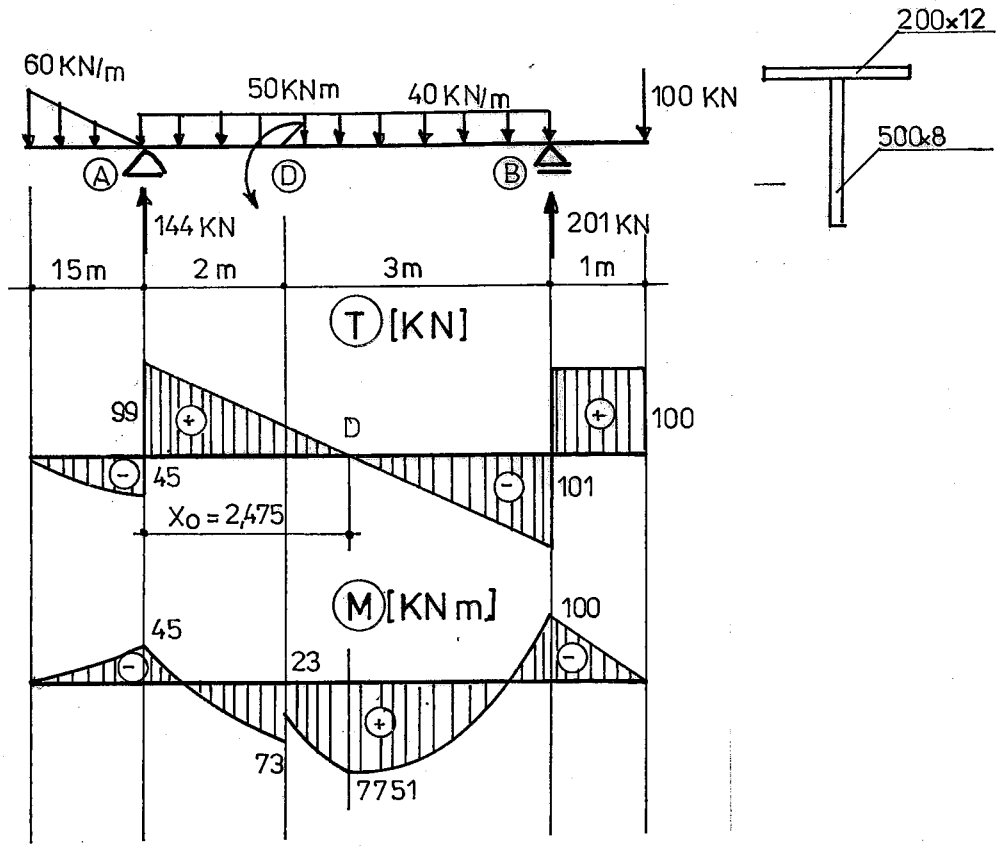


Figura 8.4.

Determinarea poziției secțiunii unde se anulează diagrama de forță tăietoare:

$$T(x_0) = 99 - 40x_0 = 0; \quad x_o = 2{,}475\,\text{m}.$$

Valorile momentelor încovoietoare în secțiunile caracteristice:

$$M_A = -\frac{1}{2}60 \cdot 1{,}5 \cdot 1 = -45\,\text{kNm};$$

$$M_D^{st} = -\frac{1}{2}60 \cdot 1{,}5 \cdot 3 + 144 \cdot 2 - 40 \cdot 2 \cdot 1 = 73\,\text{kNm};$$

$$M_D^{dr} = 73 - 50 = 23\,\text{kNm}; \quad M_B = -100 \cdot 1 = -100\,\text{kNm};$$

$$M(x_o) = -\frac{1}{2}60 \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}475 + 144 \cdot 2{,}475 - 50 - 40\frac{2{,}475^2}{2} =$$
$$= 77{,}51\,\text{kNm}.$$

Secțiunile cu eforturi maxime sunt:

$|M|_{max} = 100\,\text{kNm}$, în reazemul B;

$|T|_{max} = 101\,\text{kN}$, în secțiunea B^{st}.

Calculul caracteristicilor geometrice ale secțiunii se face ca și în Lucrarea7:

- Stabilirea poziției centrului de greutate al secțiunii: deoarece secțiunea are Oz axă de simetrie, centrul de greutete se va găsi pe această axă. Alegem axa arbitrară Oy' la jumătatea înălțimii inimii (figura 8.5):

$$z_G = \frac{-20 \cdot 1{,}2 \cdot (0{,}6 + 25)}{20 \cdot 1{,}2 + 50 \cdot 0{,}8} = -9{,}6\,\text{cm}.$$

- Momentul de inerție:

$$I_y = \frac{20 \cdot 1{,}2^3}{12} + 20 \cdot 1{,}2 \cdot 16^2 + \frac{0{,}8 \cdot 50^3}{12} + 0{,}8 \cdot 50 \cdot 9{,}6^2$$
$$= 18166{,}6\,\text{cm}^4.$$

- Modulul de rezistență:

$$W_y = \frac{18166{,}6}{34{,}6} = 525\,\text{cm}^3.$$

- Momente statice:

$S_t = 20 \cdot 1{,}2 \cdot 16 = 384\,\text{cm}^3$ (momentul static al tălpii);

$S_0 = 0{,}8 \cdot \frac{34{,}6^2}{2} = 478{,}8\,\text{cm}^3$ (momentul static al porțiunii de secțiune de dedesubtul axei neutre, reprezentată hașurat în figura 8.5).

Verificarea grinzii:

Valorile rezistențelor de calcul pentru oțelul OL 37 se scot din tabel (Anexa 2): $R = 210\,\text{N/mm}^2$ și $R_f = 120\,\text{N/mm}^2$.

- Verificarea tensiunilor normale:

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M|_{max}}{W_y} = \frac{100 \cdot 10^6}{525 \cdot 10^3} = 190{,}5\,\text{N/mm}^2\ ;$$

$$|\sigma|_{max} < R = 210 \text{ N/mm}^2.$$

- Verificarea tensiunilor tangențiale:

$$\tau_{max} = \frac{|T|_{max}}{b_0 \cdot I_y} S_0 = \frac{101 \cdot 10^3}{8 \cdot 18166{,}6 \cdot 10^4} \cdot 478{,}8 =$$

$$= 33{,}3 \text{ N/mm}^2.$$

$$\tau_{max} < R_f = 120 \text{ N/mm}^2.$$

Ambele condiții de rezistență fiind satisfăcute, grinda verifică la încovoiere cu lunecare.

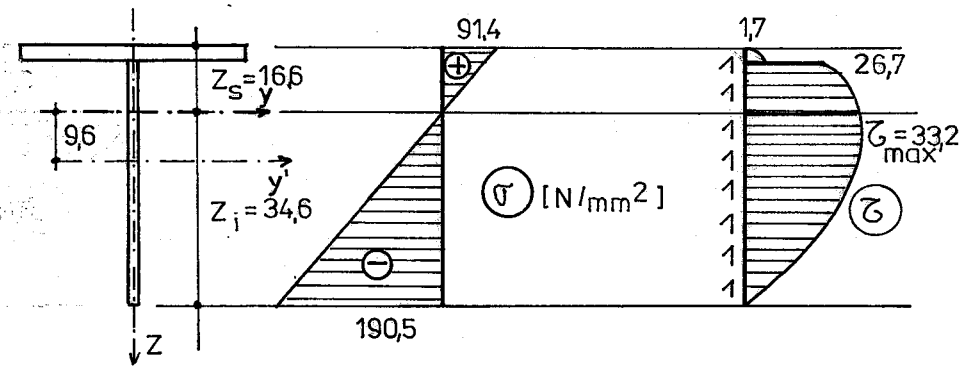
Diagrama tensiunilor normale σ (figura 8.5.a):

- Este liniară pe înălțimea secțiunii;
- Este nulă în axa neutră;
- Valorile maximă, respectiv minimă, apar în fibrele extreme. Pentru că momentul în secțiunea maxim solicitată este negativ, fibrei inferioare – cea mai depărtată de axa neutră – îi corespunde :

$$\sigma_{min} = \frac{M_{max}}{W_y} = -|\sigma|_{max} = -190{,}5 \text{ N/mm}^2.$$

Fibrei superioare îi corespunde tensiunea:

$$\sigma_{max} = \frac{-100 \cdot 10^6}{18166{,}6 \cdot 10^4} \cdot (-166) = 91{,}4 \text{ N/mm}^2,$$ calculată cu formula lui Navier.



a) b)

Figura 8.5.

Diagrama tensiunilor tangențiale τ (figura 8.5.b):

- Este parabolică pe înălțimea secțiunii;
- Este nulă în fibrele extreme;

- Este maximă în axa neutră;
- Are un salt în secțiunea de contact dintre talpă si inimă:

$$\tau_t = \frac{101 \cdot 10^3}{200 \cdot 18166{,}6 \cdot 10^4} \cdot 384 = 1{,}7\ \text{N/mm}^2;$$

$$\tau_1 = \frac{101 \cdot 10^3}{8 \cdot 18166{,}6 \cdot 10^4} \cdot 384 = 26{,}7\ \text{N/mm}^2;$$

- Are semnul și sensul forței tăietoare din secțiune.

E 8.2: Să se dimensioneze din profil I, oțel OL 37 grinda din figura 8.6. Să se treze apoi diagramele tensiunilor σ și τ în secțiunile maxim solicitate.

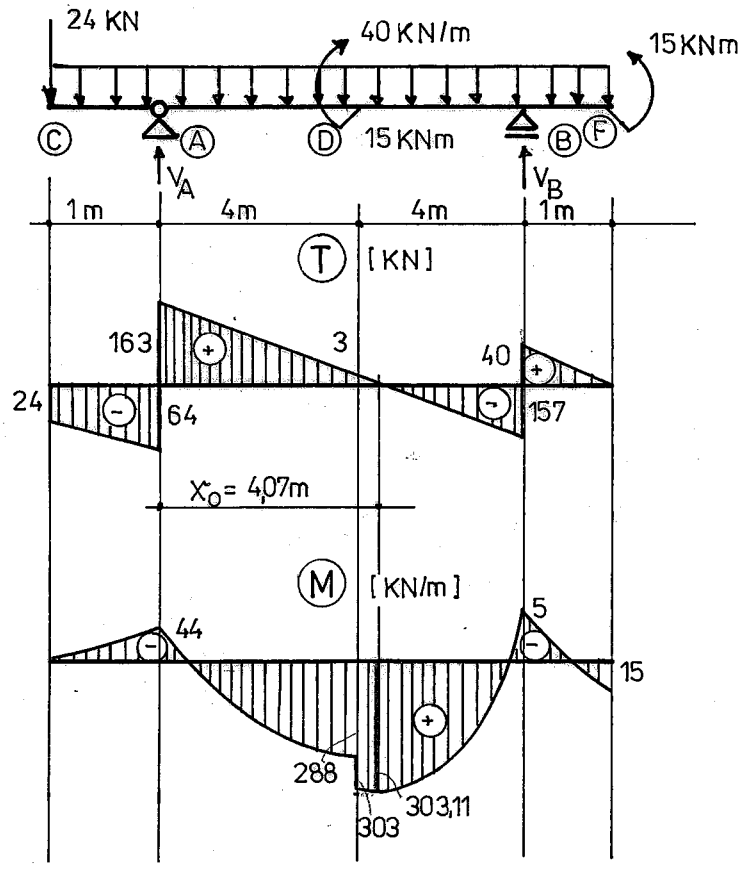


Figura 8.6.

Rezolvare:

Etape de calcul la dimensionarea grinzii:

- Trasarea diagramelor de eforturi T și M prin metoda directă sau prin suprapunere de efecte; stabilirea secțiunilor unde se produc eforturile extreme și valorile lor $|T|_{max}$ și $|M|_{max}$.

- Se calculează, din condiția de rezistență, modulul de rezistență minim necesar; se impune o formă pentru secțiune și se stabilesc dimensiunile ei efective.

- Se verifică secțiunea aleasă, utilizând dimensiunile efective.

Observație:

Nu toate tipurile de secțiuni pot fi dimensionate direct. Cu această metodă pot fi dimensionate secțiunile alcătuite din profile laminate, pentru care caracteristicile geometrice sunt tabulate în Anexe.

Secțiunile dreptunghiulare și inelare pot fi dimensionate dacă se impune a priori un raport între laturi (h/b = 1,2 ... 1,7), respectiv între diametre (d/D = 0,6 ... 0,9); după alegerea dimensiunilor efective, de regulă aceste rapoarte nu mai sunt satisfăcute. Astfel este posibil ca secțiunea proiectată să nu verifice condiția de rezistență.

Pentru secțiunile în formă de T sau I alcătuite din platbande sudate, nu este posibilă dimensionarea directă; stabilirea dimensiunilor secțiunii se face prin încercări succesive, pornind de la o secțiune preliminară alcătuită conform prescripților constructive.

Valorile rezistențelor de calcul pentru oțelul OL 37 se scot din tabel (Anexa 2): $R = 210\ N/mm^2$ și $R_f = 120\ N/mm^2$.

Calculul reacțiunilor:

$$\sum M_A = 0:$$

$$8V_B - 40 \cdot 1 \cdot 8{,}5 + 15 - 40 \cdot 8 \cdot 4 - 15 + 40 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 24 \cdot 1 = 0$$

$$V_B = 197\ kN;$$

$$\sum M_B = 0:$$

$$8V_A - 40 \cdot 1 \cdot 8{,}5 - 24 \cdot 9 - 40 \cdot 8 \cdot 4 + 15 + 40 \cdot 1 \cdot 0{,}5 - 15 = 0$$

$$V_A = 227\ kN.$$

Verificare: $\sum Z = 40 \cdot 10 + 24 - 197 - 227 = 0$.

Forțe tăietoare în secțiunile carateristice:

$$T_C = -24\ kN; \quad T_A^{st} = -24 - 40 \cdot 1 = -64\ kN; \quad T_A^{dr} = -64 + 227 = 163\ kN;$$

$$T_B^{st} = 163 - 40 \cdot 8 = -157\ kN;$$

$$T_B^{dr} = -157 + 197 = 40\,\text{kN}.$$

Determinarea secțiunii unde se anulează forța tăietoare:

$$T(x_0) = 163 - 43x_0 = 0\,; \quad x_0 = \frac{163}{40} = 4{,}07\ \text{m}.$$

Determinarea momentelor în secțiunile caracteristice:

$$M_A = -24 \cdot 1 - 40 \cdot 1 \cdot 0{,}5 = -44\,\text{kNm};$$

$$M_D^{st} = -24 \cdot 5 - 40 \cdot 1 \cdot 4{,}5 + 227 \cdot 4 - 40 \cdot 4 \cdot 2 = 288\,\text{kNm};$$

$$M_D^{dr} = 288 + 15 = 303\,\text{kNm}; \qquad M_F = 15\,\text{kNm};$$

$$M_B = -40 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 15 = -5\,\text{kNm};$$

$$M(x_0) = -24 \cdot 5{,}07 - 40 \cdot 1 \cdot 4{,}57 + 227 \cdot 4{,}07 - 40\frac{4{,}07^2}{2} + 15$$

$$M(x_0) = 303{,}11\,\text{kNm}.$$

Secțiunile maxim solicitate sunt:

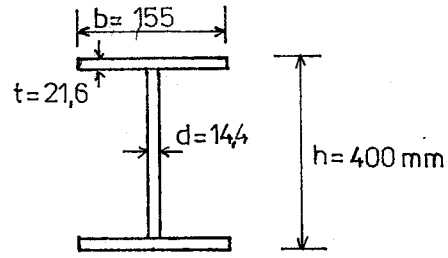
$|M|_{max} = 303{,}11\,\text{kNm}$ (în secțiunea unde se anulează forța tăietoare);

$|T|_{max} = 163\,\text{kN}$ (în reazemul A^{dr}).

Dimensionarea din profil laminat I:

$$W_{y,nec} \geq \frac{|M|_{max}}{R} = \frac{303{,}11 \cdot 10^6}{210} \cdot 10^{-3} = 1443{,}4\ \text{cm2}.$$

Din tabel (Anexa 6) aleg profil I 40, cu următoarele caracteristici (figura 8.7):



$I_y = 29210\ \text{cm}^4$;

$W_y = 1460\ \text{cm}^3$;

$S_o = 857\ \text{cm}^3$.

Figura 8.7.

Verificarea profilului ales:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_{y,ef}} = \frac{303{,}11 \cdot 10^6}{1460 \cdot 10^3} = 207{,}6\text{N/mm}^2 < R = 210\text{N/mm}^2$$

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} S_o}{b_o \cdot I_y} = \frac{163 \cdot 10^3 \cdot 857 \cdot 10^3}{14{,}4 \cdot 20210 \cdot 10^4} = 33{,}2 N/mm^2 < R_f$$

$$R_f = 120 N/mm^2.$$

Diagramele tensiunilor σ și τ în secțiunile maxim solicitate (figura 8.8):

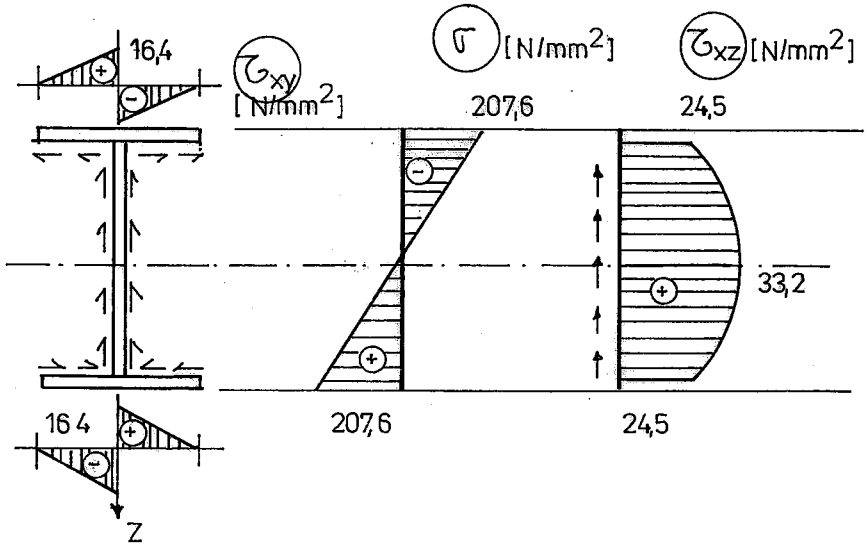


Figura 8.8.

Diagrama σ este simetrică, având:

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \pm \frac{M_{max}}{W_y} = 207{,}6 N/mm^2$$

Considerând secțiunea ca și o bară cu pereți subțiri, tensiunile tangențiale τ vor forma un flux pe secțiune. Diagrama tensiunilor τ_{xz} din inimă are o variație parabolică, iar diagrama tensiunilor τ_{xy} din tălpi este liniară. Tensiunea tangențială maximă în inimă se obține în axa neutră, cu formula lui Jurawsky:

$$\tau_{xz,max} = \frac{163 \cdot 10^3 \cdot 857 \cdot 10^3}{14{,}4 \cdot 20210 \cdot 10^4} = 33{,}2 N/mm^2.$$

În fibrele de la extremitățile inimii, avem:

$$\tau_{xz,max} = \frac{163 \cdot 10^3 \cdot 857 \cdot 10^3}{14,4 \cdot 20210 \cdot 10^4} = 33,2 N/mm^2.$$

În fibrele de la extremitățile inimii, avem:

$$S_t = 15,5 \cdot 2,16\left(\frac{40}{2} - \frac{2,16}{2}\right) = 633,4\ cm^3;$$

$$\tau_{xz} = \frac{163 \cdot 10^3 \cdot 633,4 \cdot 10^3}{14,4 \cdot 29210 \cdot 10^4} = 24,5\ N/mm^2.$$

Pentru calculul tensiunilor tangențiale τ_{xy} din talpă se folosește tot formula lui Jurawsky, în care se introduce valoarea momentului static al porțiunii de talpă delimitată de o paralelă la Oz dusă prin punct (figura 8.8). Valoarea maximă a acestor tensiuni se obține la jumătatea tălpii.

$$\tau_{xy,max} = \frac{163 \cdot 10^3}{21,6 \cdot 29210 \cdot 10^4} \cdot \frac{633,4 \cdot 10^3}{2} = 16,4\ N/mm^2.$$

Pentru stabilirea semnului tensiunilor tangențiale estenecesară reprezentarea fluxului acestora pe secțiune. În inimă, sensul fluxului este același cu sensul forței tăietoare din secțiune.

Tensiunile tangențiale sunt pozitive atunci când fluxul și axa au sensuri opuse. La jumătatea tălpii, tensiunile τ_{xy} înregistrează o discontinuitate, care corespunde schimbării de sens a fluxului.

E 8.3: Să se determine forța maximă (capabilă) care poate fi aplicată ginzii alcătuită si încărcată ca în figura 8.9, confecționată din oțel OL 37.

Rezolvare:

Etapele de calcul la determinarea forței capabile sunt:

- Trasarea diagramei de momente prin suprapunere de efecte și evaluarea momentului maxim în secțiunile periculoase.

Observație: în această etapă se lucrează pe grindă.

- Calculul caracteristicilor geometrice ale secțiunii: I_y, W_y, S_y și al momentului capabil al secțiunii Mcap.

Observație: în această etapă se lucrază pe secțiune.

- Se pune condiția ca momentul din secțiunea periculoasă să nu depășească momentul capabil al secțiunii:

$$|M_{max}| = M_{cap}.$$

Prin rezolvarea acestei ecuații se obține valoarea forței capabile.

Observații:

a). Într-o secțiune putem avea cel mult o forță necunoscută.

b). Sunt acceptabile numai soluțiile pozitive ale ecuației, deci problema poate să admită soluții sau nu.

c). Dacă s-au obținut mai multe valori acceptabile pentru forța capabilă, soluția problemei este dată de cea mai mică dintre ele.

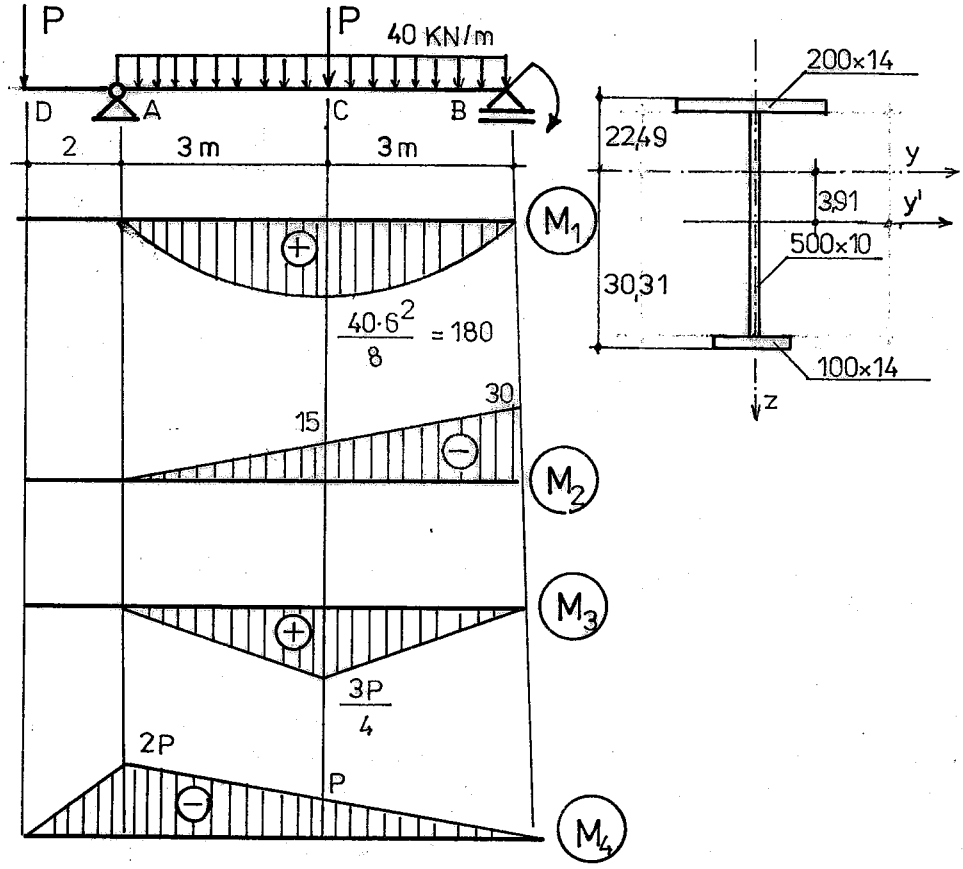


Figura 8.9.

Valorile rezistențelor de calcul pentru oțelul OL 37 se scot din tabel (Anexa 2): $R = 210$ N/mm^2 și $R_f = 120$ N/mm^2.

Trasarea diagramelor de eforturi se face prin suprapunere de efecte, prin aceasta înlăturându-se inconvenientul lucrului cu forțe de valori necunoscute. Se construiesc direct diagramele simple corespunzătoare fiecărei încărcări de pe bară (figura 8.9.c), așa cum s-a arătat în Lucrarea 2.

Evaluarea momentului în secțiunile periculoase se face în felul următor:

- Se examinează diagramele simple; secțiunea periculoasă este o secțiune în care cel puțin o diagramă simplă are un extrem. Deci, secțiunile periculoase în cazul acestei probleme vor fi: A, C și B. În secțiunea B momentul are o valoare finită (egală cu 30 kNm), care nu depinde de forța necunoscută, și deci aceasta nu este o secțiune periculoasă.
  Totuși este necesar să se verifice ca acest moment să nu depășească valoarea momentului capabil, situație în care bara nu ar satisface condițiile de rezistență.

- În aceste secțiuni (A și C) se însumează algebric momentele corespunzătoare tuturor diagramelor simple trasate:

$$M_A = -2P;$$

$$M_C = 180 - 15 + \frac{3}{4}P - P = 165 - \frac{P}{4}.$$

Calculul caracteristicilor geometrice ale secțiunii:

- Stabilirea poziției centrului de greutate al secțiunii: deoarece secțiunea are Oz axă de simetrie, centrul de greutate se va găsi pe această axă. Alegem axa arbitrară Oy' la jumătatea înălțimii inimii (figura 8.9.b):

$$z_G = \frac{20 \cdot 1{,}4 \cdot (-25{,}7) + 10 \cdot 1{,}4 \cdot 25{,}7}{20 \cdot 1{,}4 + 50 \cdot 10 + 10 \cdot 1{,}4} = -3{,}91 \text{ cm}.$$

- Momentul de inerție:

$$I_y = \frac{20 \cdot 1{,}4^3}{12} + 20 \cdot 1{,}4 \cdot 21{,}79^2 + \frac{1 \cdot 50^3}{12} + 1 \cdot 50 \cdot 3{,}91^2 +$$

$$+ \frac{10 \cdot 1{,}4^3}{12} + 10 \cdot 1{,}4 \cdot 29{,}61^2 =$$

$$= 36757 \text{ cm}^4.$$

- Modulul de rezistență:

$$W_y = \frac{36757}{30{,}31} = 1212{,}7 \text{ cm}^3.$$

Momentul capabil al secțiunii este:

$$M_{cap} = W_y R = 1212{,}7 \cdot 10^3 \cdot 210 \cdot 10^{-6} = 254{,}7 \text{ kNm}.$$

Punem condiția ca momentul din secțiunile periculoase să nu depășească valoarea momentului capabil al secțiunii barei:

$$|M|_{max} = M_{cap}.$$

- În secțiunea A: $|M_A| = M_{cap}$, adică $|2P| = M_{cap}$, de unde:

$$2P = \pm 254{,}6 \Rightarrow P_{1,2} = \pm\frac{254{,}6}{2} = \pm 127{,}3\,\text{kN}.$$

- În secțiunea C: $|M_C| = M_{cap}$, adică $\left|165 - \frac{P}{4}\right| = M_{cap}$, de unde:

$165 - \frac{P}{4} = \pm 254{,}6$. Luând membrul doi cu semnul plus, rezultă:

$$165 - \frac{P}{4} = 254{,}6 \Rightarrow P_3 = -358{,}4\,\text{kN},$$

și luând mrmbrul doi cu semnul minus, rezultă:

$$165 - \frac{P}{4} = -254{,}6 \Rightarrow P_4 = 1678{,}4\,\text{kN}.$$

Se iau în considerare numai valorile pozitive obținute. Atunci, forța maximă care poate fi aplicată barei date, în condiții de siguranță, este:

$$P_{cap} = \min(P_1, P_4) = 127{,}3\,\text{kN}.$$

C. TEMA LUCRĂRII

Problema 6.1: Se dă bara încărcată și alcătuită ca în figura 8.10, din oțel OL 37. Se cere:

a).verificarea barei.

b).diagramele tensiunilor σ și τ în secțiunile maxim solicitate.

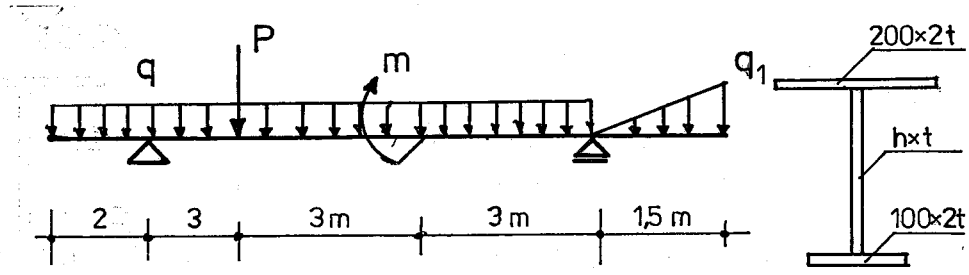


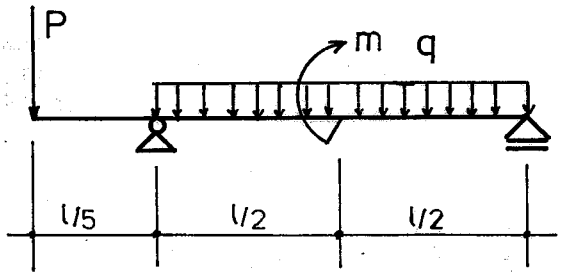
Figura 8.10.

Date numerice:

Tabelul 8.1.

n	h mm	t mm	
1	800	12	$P = (100 - 2n)$ kN;
2		10	
3		8	$M_o = 30$ kNm;
4		6	
5	700	12	$q = (20 - n)$ kN/m;
6		10	
7		8	$q_1 = 2q$ kN/m.
8		6	
9	600	12	
10		10	
11		8	
12		6	
13	500	12	
14		10	
15		8	

Problema 8.2: Să se dimensioneze din profil I, oțel OL 37, grinda din figura 8.11. Să se traseze apoi diagramele tensiunilor σ și τ în secțiunea de reazem A^{dr}.



$P = (200 - 3n)$ kN;
$q = (20 + n)$ kN/m;
$M_o = (80 + 2n)$ kNm;
$l = (6 + 0{,}1n)$ m.

Figura 8.11.

Problema 8.3: Să se stabilească încărcările capabile P_{cap} și q_{cap} pentru grinda cu secțiune T din figura 8.12, confecționată din oțel OL 37.

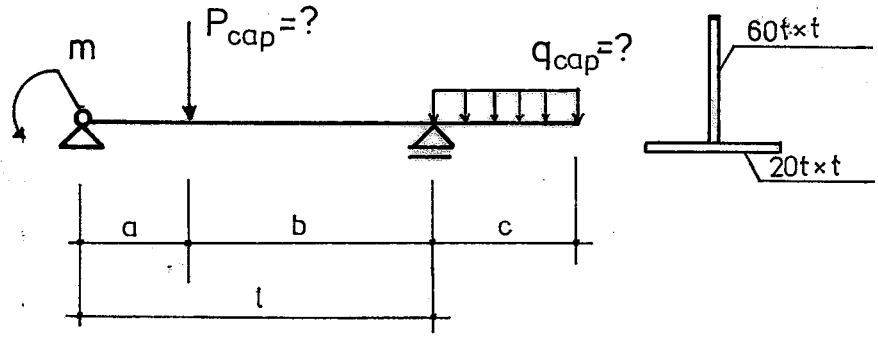


Figura 8.12.

Date numerice:

Tabelul 8.2.

n	1; 4; 7; 10; 13	2; 5; 8; 11; 14	3; 6; 9; 12; 15
t[mm]	6 mm	8 mm	10 mm

$M_o = (40 + 5n)$ kNm; $l = (6 + 0,1n)$ m;

a = 0,2l ... grupa 1;
0,3l ... grupa 2;
0,4l ... grupa 3;

c = 0,2l ... grupa 1;
0,25l ... grupa 2;
0,3l ... grupa 3.

D. TEST DE VERIFICARE A CUNOȘTINȚELOR

1. Încovoierea simplă este o solicitare:
   a).simplă;
   b).compusă.

2. Ce eforturi apar în secțiunile unei bare supuse la încovoiere pură?
   a).efort axial;
   b).forță tăietoare;
   c).moment încovoietor;
   d).moment de torsiune.

3. Spuneți dacă bara din figura 8.13 este solicitată la încovoiere simplă.
   a).da;
   b).nu.

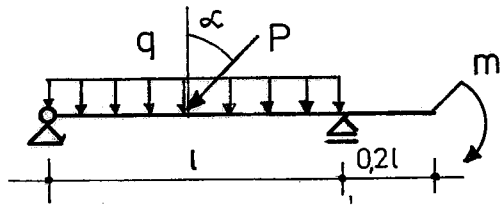


Figura 8.13.

4. Spuneți dacă bara din figura 8.14 este solicitată la încovoiere pură
   a).da;
   b).nu.

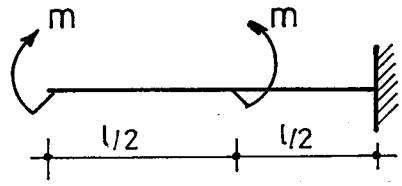


Figura 8.14.

5. Ce tensiuni apar în secțiunile unei bare supuse la încovoiere simplă?
   a).tensiuni normale;
   b).tensiuni tangențiale.

6. Cum variază tensiunile normale pe înălțimea secțiunii?
   a).constant;
   b).liniar;
   c).parabolic.

7. Cum variază tensiunile tangențiale pe înălțimea secțiunii ?
   a).constant;
   b).liniar;
   c).parabolic.

8. Care este secțiunea în care tensiunile tangențiale ating valoarea maximă?
   a).secțiunea cu effort maxim;
   b).încastrarea;
   c).fibra extremă.

9. Momentul maxim al grinzii din figura 8.15 este $|M|_{max}$=100 kNm și este negativ. Care este diagrama corectă a tensiunilor normale?

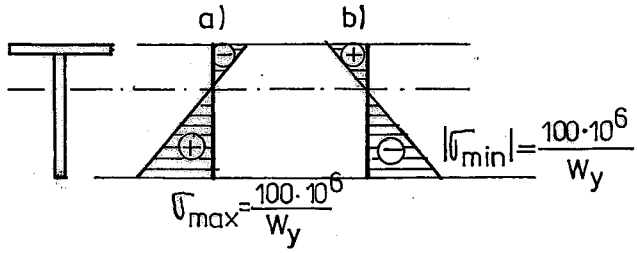


Figura 8.15.

a).diagrama corectă este a;
b).diagrama corectă este b.

10. Grinda din figura 8.16 are: I_y = 110241 cm4; W_y = 2309,7cm3; M_{max}=485 kNm. Care dintre diagramele de mai jos este corectă?

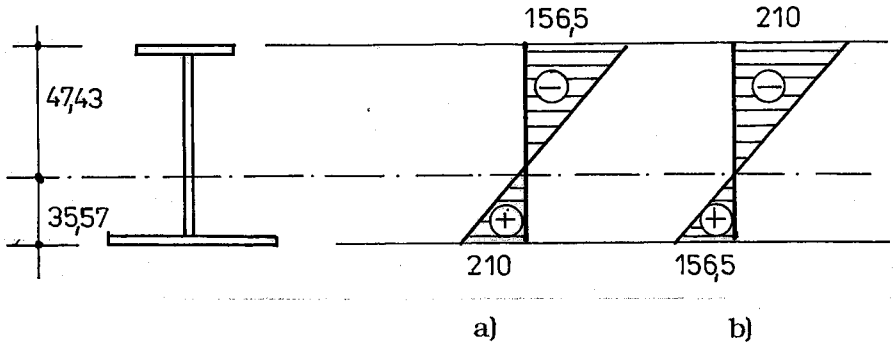


Figura 8.16.

a).diagrama corectă este a;
b).diagrama corectă este b.

11. În care fibră a secțiunii tensiunile tangențiale ating valoarea extremă?
a).în fibra extremă cea mai îndepărtată de axa neutră;
b).în axa neutră.

12. Se dă grinda din figura 8.17. În care secțiune se va face dimensionarea barei?
a).în secțiunea C;
b).în secțiunea C^{st};

c).în secțiunea C^{dr};
d).în secțiunea B.

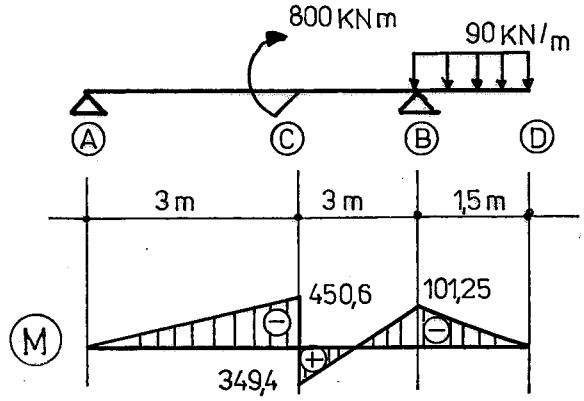


Figura 8.17.

13. Pentru a lucra în condiții de siguranță, o grindă încovoiată trebuie să satisfacă relația:

a). $\sigma_{max} = \frac{M_{mx}}{W_y} \leq R$;

b). $\tau_{max} = \frac{T_{max} S_0}{b_0 I_y} \leq R_f$;

c).ambele relații.

14. Care este valoarea forței capabile pentru grinda din figura 8.18?

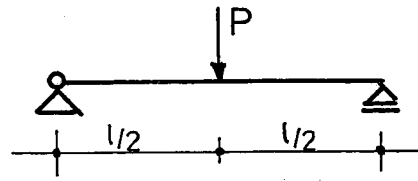


Figura 8.18.

a). $P_{cap} = \frac{4M_{cap}}{l}$;

b). $P_{cap} = \frac{M_{cap}}{l}$;

c). $P_{cap} = \frac{3}{4} M_{cap}$.

15. Este corect reprezentată diagrama τ din figura 8.19, știind că T=100 kN, S_{oy}=381 cm^3 și I_y=9800 cm^4 ?

a).da, este corect;

b).nu, reprezentarea este greșită deoarece ... .

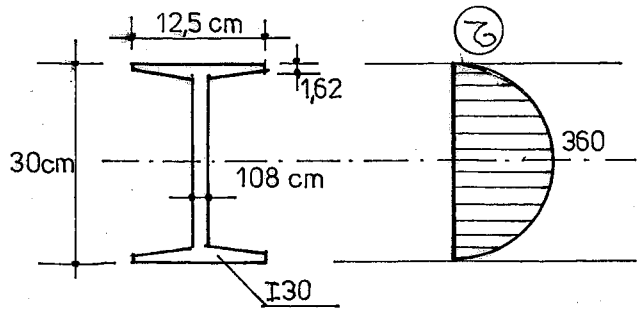


Figura 8.19.

Lucrarea 9:

CALCULUL DEPLASĂRILOR GRINZILOR ÎNCOVOIATE PRIN METODA GRINZII CONJUGATE

A.NOȚIUNI TEORETICE

1.Deplasări

Sub acțiunea încărcărilor, grinzile încovoiate suferă deformații și deplasări. Acestea din urmă se datorează în primul rând momentelor încovoietoare și, în foarte mică măsură, forțelor tăietoare. Influența forțelor tăietoare fiind mică, acestea vor fi neglijate în cele ce urmează.

Prin încovoiere, axa barei, inițial dreaptă, se transformă într-o curbă plană, numită ***axa deformată***. Deplasările oricărui punct al barei sunt complet determinate de ecuația w = w(x) a axei deformate.

Deplasările longitudinale ale punctelor (după Ox) sunt neglijabile.

În consecință, un punct curent va avea o deplasare w normală la axa barei, numită ***săgeată***, iar secțiunea normală căreia îi aparține punctul se va roti în jurul axei ei neutre cu un unghi φ, numit ***rotire***.

Săgeata w se consideră pozitivă în sensul axei Oz (descendentă).

Rotirea $\varphi = \frac{dw}{dx}$ are ca sens pozitiv sensul orar (figura 9.1).

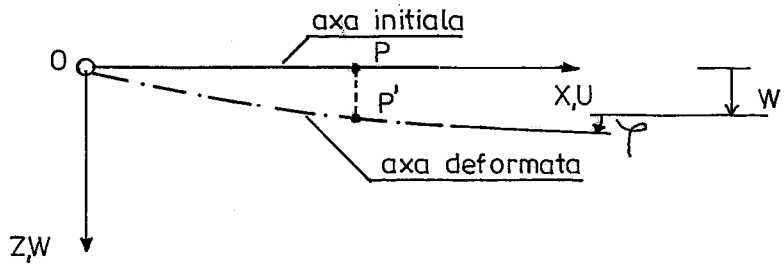


Figura 9.1.Deplasările grinzilor încovoiate.

2.Ecuația diferențială a axei deformate și metode pentru calculul deplasărilor

Ecuația diferențială de ordinul doi a axei deformate este descrisă de relația:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI_y},$$

unde: w(x) este ecuația săgeții (axei deformate);
M(x) este expresia analitică a momentului încovoietor;
E este modulul de elasticitate longitudinal;
I_y este momentul de inerție al secțiunii în raport cu axa neutră Oy.

Pornind de la această ecuație, s-au dezvoltat două metode pentru calculul deplasărilor grinzilor încovoiate:

- Metoda integrării directe a ecuației diferențiale de ordinul doi cu condiții la limită;
- Metoda grizii conjugate (Mohr).

Ecuația diferențială de ordinul patru a axei deformate este:

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4} = \frac{p(x)}{EI_y},$$

unde p(x) este expresia analitică a încărcării transversale.

Pornind de la această ecuație, deplasările grinzilor încovoiate se pot calcula prin două metode:

- Metoda integrării directe a ecuației diferențiale de ordinul patru cu condiții la limită;
- Metoda parametrilor inițiali.

3.Metoda grinzii conjugate (Mohr)

Această metodă este eficientă pentru calculul deplasărilor punctuale; ea nu permite determinarea expresiilor analitice ale săgeții w =w(x) și rotirii φ = φ(x).

Metoda se bazează pe analogia dintre relațiile diferențiale între încărcări și eforturi pe de o parte și ecuația diferențială de ordinul doi a axei deformate de cealaltă parte:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -p \quad \leftrightarrow \quad \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EI_y}$$

$$\frac{dM}{dx} = T \quad \leftrightarrow \quad \frac{dw}{dx} = \varphi .$$

Se obține astfel următoarea corespondență:

$$p \leftrightarrow \frac{M}{EI_y}; \quad M \leftrightarrow w; \quad T \leftrightarrow \varphi.$$

Astfel deplasările w și φ ale unei grinzi încărcate cu sarcina p se pot egala cu eforturile moment încovoietor și forță tăietoare calculate pe o grindă – numită ***grindă conjugată sau fictivă*** – încărcată cu sarcina fictivă M/EI_y. Calculul deplasărilor se reduce deci la un calcul de eforturi.

Pentru ca analogia între cele două grupuri de relații să fie completă, este nevoie să se stabilească corespondența dintre constantele care apar la integrarea lor. Aceasta înseamnă, de fapt, transformarea condițiilor care se pun pentru deplasări în reazemele grinzii reale în condiții exprimate în eforturi pe grinda fictivă.

Practic, acest lucru se realizează înlocuind reazemele grinzii reale (în care se pun condiții pentru w și φ) cu reazeme conjugate sau fictive (care satisfac condiții identice exprimate însă pentru M_f și T_f).

Corespondența dintre reazemele reale și cele fictive este dată în tabelul 9.1.

Etape de calcul pentru bare cu rigiditate constantă (EI_y = constant):

1) Se trasează diagrama momentelor încovoietoare M pe grinda reală. Dacă există mai multe încărcări, diagrama se trasează prin suprapunere de efecte.

2) Se construiește grinda conjugată, înlocuind reazemele grinzii reale cu reazemele corespunzătoare, conform tabelului 9.1.

3) Se încarcă grinda conjugată cu diagrama de momente M de pe grinda reală.

Observație: Încărcările de pe grinda reală sunt pozitive dacă au sensul axei Oz (descendente) iar momentele pozitive sunt reprezentate sub linia de referință; pentru ca momentele pozitive de pe grinda reală să se transforme în încărcări fictive tot pozitive pe grinda conjugată, este necesară răsturnarea diagramei de momente M. Astfel, momentele pozitive se transformă în încărcări fictive care au sensul axei Oz, deci sunt pozitive.

4) Pe grinda conjugată, astfel încărcată, se calculează eforturile fictive T_f și M_f în secțiunile cerute.

5) Deplasările grinzii reale se vor determina cu relațiile:

$$\varphi = \frac{T_f}{EI_y} \quad \text{și} \quad w = \frac{M_f}{EI_y}.$$

Tabelul 9.1. Corespondența dintre reazemele reale și cele fictive.

GRINDA REALĂ	GRINDA CONJUGATĂ (FICTIVĂ)
Încastrare $w=0;\ \varphi=0$	Capăt liber $M_f=0;\ T_f=0$
Capăt liber $w\neq0;\ \varphi\neq0$	Încastrare $M_f\neq0;\ T_f\neq0$
Articulație sau reazem simplu marginale $w=0;\ \varphi\neq0$	Articulație sau reazem simplu $M_f=0;\ T_f\neq0$
Reazem simplu intermediar $w=0;\varphi_{st}=\varphi_{dr}$	Articulație intermediară nesprijinită $M_f=0;\ T_f^{st}=T_f^{dr}$
Articulație intermediară nesprijinită $w_{st}=w_{dr};\ \varphi_{st}\neq\varphi_{dr}$	Reazem simplu intermediar $M_f^{st}=M_f^{dr};T_f^{st}\neq T_f^{dr}$

Câteva observații importante legate de aplicarea acestei metode:

- Unități de măsură:
  - Încărcarea fictivă se măsoară în kNm;
  - Forța tăietoare fictivă se măsoară în kNm^2;
  - Momentul încovoietor fictiv se măsoară în kNm^3.

- În cazul încărcărilor reale complicate, se folosește *principiul suprapunerii efectelor:*
  - Se trasează diagrama de momente din fiecare încărcare simplă; pentru n încărcări simple se vor obține n diagrame simple M_1, M_2, ... , M_n. Pentru aceste diagrame se poate evalua rezultanta (aria) și poziția acestei rezultante (centrul de greutate al diagramei), așa cum se poate vedea din tabelul 9.2.

  - Grinda conjugată se încarcă pe rând cu fiecare dintre diagramele M_1, M_2, ... , M_n și se determină eforturile fictive corespunzătoare $T_f^{(n)}$ și $M_f^{(n)}$ în secțiunile cerute.

  - Deplasările grinzii reale se determină prin suprapunere de efecte:

$$\varphi=\frac{T_f^{(1)}+T_f^{(2)}+\ldots+T_f^{(n)}}{EI_y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}T_f^{(i)}}{EI_y};$$

$$w = \frac{M_f^{(1)} + M_f^{(2)} + ... + M_f^{(n)}}{EI_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_f^{(i)}}{EI_y}.$$

- Grinzile conjugate rezultă de multe ori ca și sisteme plane cu console și articulații (grinzi Gerber). Pentru calculul acestora se va consulta Lucrarea 3, paragraful 2.

4.Calculul de rigiditate al grinzilor

Limitarea deplasărilor grinzilor încovoiate este determinată în principal de condițiile de exploatare. Starea de solicitare peste care nu mai este sigurată exploatarea în bune condiții a grinzii este denumită **starea limită de deformare.**

Relația prin care se limitează săgețile sub valorile care corespund acestei stări, se numește **condiția de rigiditate** și se exprimă sub forma:

$$f_{max} \leq f_{adm},$$

unde: f_{max} este săgeata maximă a grinzii;
f_{adm} este săgeata admisibilă, dată în norme ca fracțiune din deschiderea grinzii (1/200 ... 1/600).

În general, condiția de rigiditate se utilizează ca o relație de verificare. În cazul în care ea nu este satisfăcută, grinda se redimensionează și se verifică din nou condiția de rigiditate.

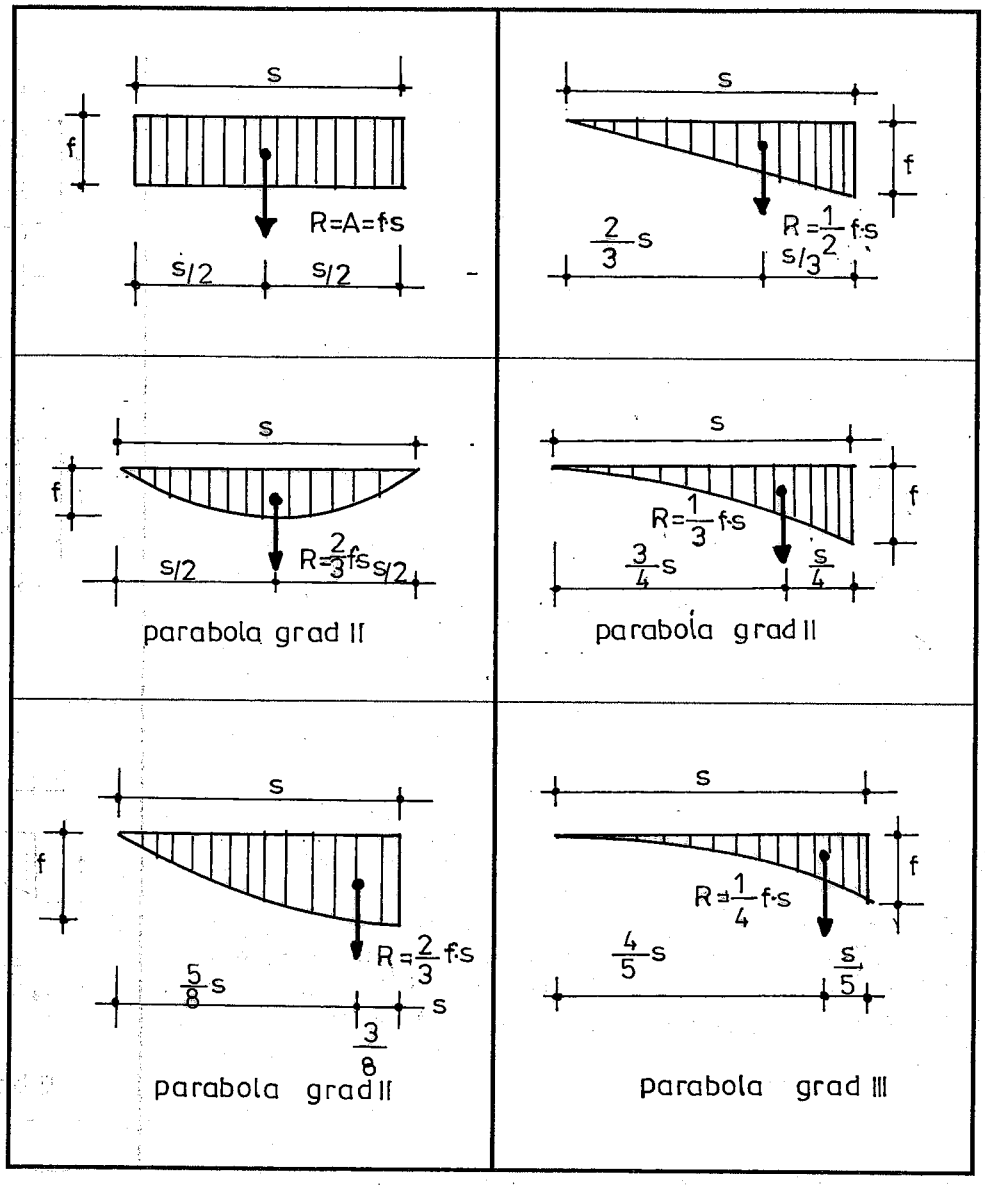
B. EXEMPLE DE CALCUL

E 9.1: Să se determine săgeata și rotirea la jumătatea deschiderii (secțiunea C) și în capătul liber (secțiunea D) al grinzii din figura 9.2.a, având secțiunea transversală alcătuită din oțel OL 37 ca în figura 9.2.b. Să se verifice apoi condiția de rigiditate la jumătatea deschiderii, știind că săgeata admisibilă f_{adm} =1cm.

Rezolvare:

Pentru oțelul OL 37 găsim în tabele (Anexa 1): $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2.
Determinăm caracteristicile geometrice ale secțiunii:

Tabelul 9.2. Aria și poziția centrului de greutate ale diagramelor simple.



- Stabilirea poziției centrului de greutate al secțiunii: deoarece secțiunea are Oz axă de simetrie, centrul de greutate se va găsi pe această axă. Alegem axa arbitrară Oy' la fibra superioară:

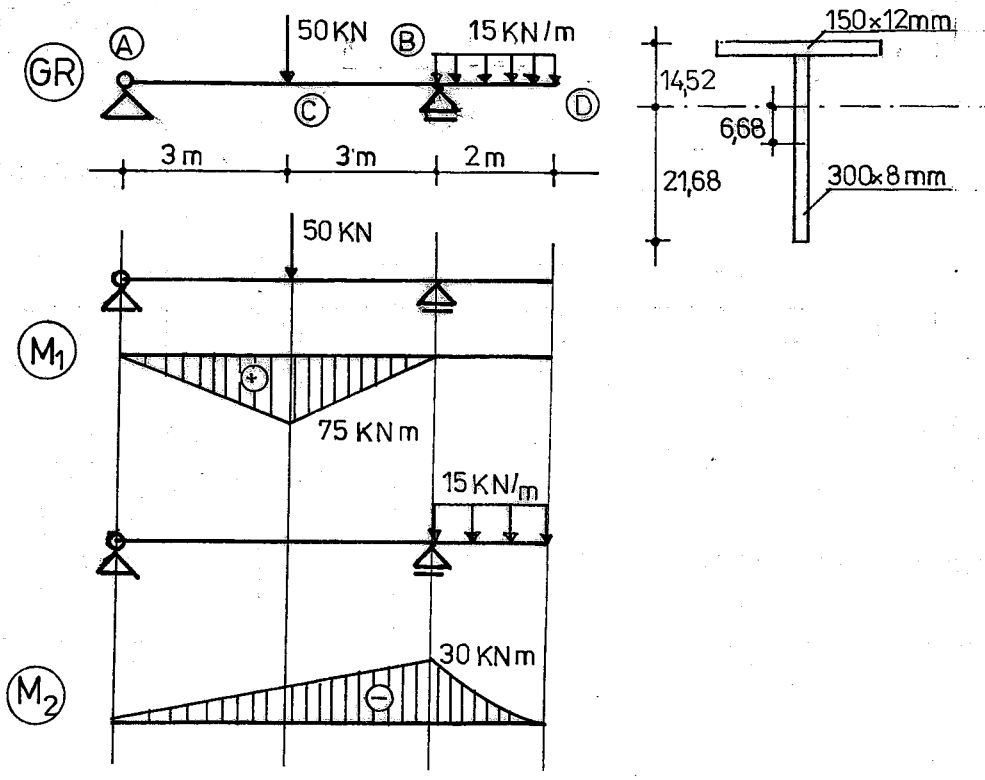
$$z_G = \frac{-15 \cdot 1{,}2 \cdot 15{,}6}{15 \cdot 1{,}2 + 30 \cdot 0{,}8} = -6{,}68\,\text{cm}.$$

- Momentul de inerție:

$$I_y = \frac{15 \cdot 1{,}2^3}{12} + 15 \cdot 1{,}2 \cdot 13{,}92^2 + \frac{0{,}8 \cdot 30^3}{12} + 0{,}8 \cdot 30 \cdot 6{,}68^2$$
$$= 6360{,}9\,\text{cm}^4.$$

Trasăm diagramele de momente pe grinda reală din forța concentrată P și din forțele uniform distribuite q (figura 9.2.c).

Alcătuim grinda conjugată, înlocuind capătul liber cu o încastrare, reazemul simplu intermediar din B devine articulație interioară iar articulația de capăt din A rămâne neschimbată (figura 9.2.d). grinda conjugată obținută astfel este o grindă Gerber.



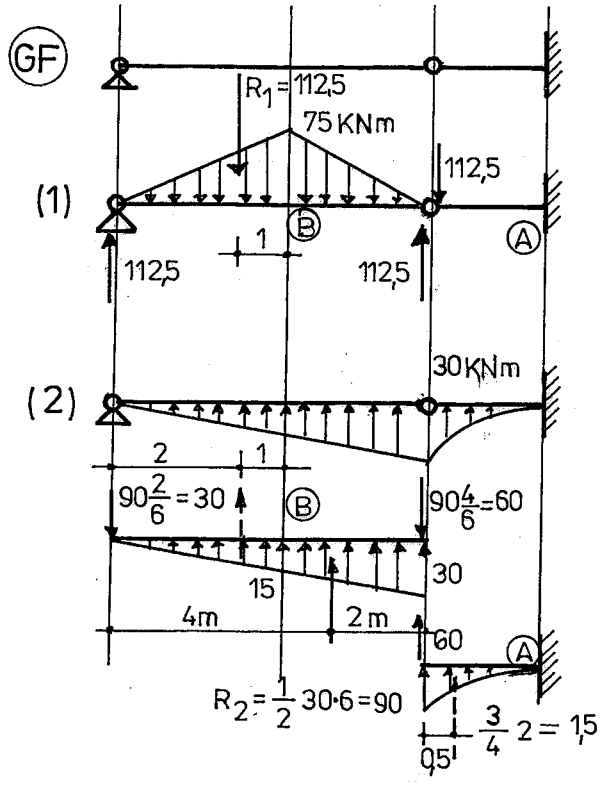


Figura 9.2.

Încărcăm grinda conjugată cu diagrama de momente M_1 răsturnată și vom determina eforturile fictive în secțiunile C și D. Pentru aceasta:

- se desface articulația interioară din B și de înlocuiește cu reacțiunile necunoscute V_B, egale și cu semne contrare pe cele două capete de bară (figura 9.2.e);
- se determină V_B din ecuațiile de echilibru ale barei A-B:

$$V_A = V_B = \frac{1}{2}75 \cdot 3 = 112{,}5 \text{ kNm}^2;$$

- se calculează eforturile fictive în secțiunile C și D:

$$T^{(1)}_{f,C} = 112{,}5 - 112{,}5 = 0;$$

$$M^{(1)}_{f,C} = 112{,}5 \cdot 3 - \frac{1}{2}112{,}5 \cdot 1 = 225 \text{ kNm}^3;$$

$$T^{(1)}_{f,D} = -112{,}5 \text{ kNm}^2; \quad M^{(1)}_{f,D} = -112{,}5 \cdot 2 = -225 \text{ kNm}^3.$$

Încărcăm apoi grinda conjugată cu diagrama de momente M_2 răsturnată și vom determina eforturile fictive în secțiunile C și D. Pentru aceasta:

- se desface articulația interioară din B și de înlocuiește cu reacțiunile necunoscute V_B, egale și cu semne contrare pe cele două capete de bară (figura 9.2.f);
- se determină V_B din ecuațiile de echilibru ale barei A-B:

$$R_2 = \frac{1}{2}30 \cdot 6 = 90\ \text{kNm}^2;$$

$$V_A = \frac{2}{6}R_2 = \frac{90}{3} = 30\ \text{kNm}^2;\quad V_B = \frac{4}{6}R_2 = \frac{2}{3}90 = 60\ \text{kNm}^2;$$

- se calculează eforturile fictive în secțiunile C și D:

$$T_{f,C}^{(2)} = -30 + \frac{1}{2}15 \cdot 3 = -7{,}5\ \text{kNm}^2;$$

$$M_{f,C}^{(2)} = -30 \cdot 3 + \frac{1}{2}15 \cdot 3 \cdot 1 = -67{,}5\ \text{kNm}^3;$$

$$T_{f,D}^{(2)} = 60 + \frac{1}{3}30 \cdot 2 = 80\ \text{kNm}^2;$$

$$M_{f,D}^{(2)} = 60 \cdot 2 + \frac{1}{3}30 \cdot 2 \cdot 1{,}5 = 150\ \text{kNm}^3.$$

Determinarea deplasărilor pe grinda reală:

$$\varphi_C = \frac{T_{f,C}^{(1)} + T_{f,C}^{(2)}}{EI_y} = \frac{(0 - 7{,}5) \cdot 10^9}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 6360{,}9 \cdot 10^4} = -5{,}61 \cdot 10^{-4}\ \text{radiani};$$

$$w_C = \frac{M_{f,C}^{(1)} + M_{f,C}^{(2)}}{EI_y} = \frac{(225 - 67{,}5) \cdot 10^{12}}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 6360{,}9 \cdot 10^4} = 11{,}9\ \text{mm};$$

$$\varphi_D = \frac{T_{f,D}^{(1)} + T_{f,D}^{(2)}}{EI_y} = \frac{(-112{,}5 + 80) \cdot 10^9}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 6360{,}9 \cdot 10^4} = -2{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{radiani};$$

$$w_D = \frac{M_{f,D}^{(1)} + M_{f,D}^{(2)}}{EI_y} = \frac{(-225 + 150) \cdot 10^{12}}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 6360{,}9 \cdot 10^4} = -0{,}56\ \text{mm}.$$

Schița axei deformate trasată prin punctele C și D este reprezentată în figura 9.3.

Verificarea condiției de rigiditate la jumătatea deschiderii:

$$w_C = 11{,}9\ \text{mm} > w_{adm} = 10\ \text{mm}.$$

Grinda nu verifică deci condiția de rigiditate. Pentru ca această condiție să fie satisfăcută, se va alege o secțiune cu moment de inerție mai mare, de exemplu un profil I. Din relația de calcul a săgeții:

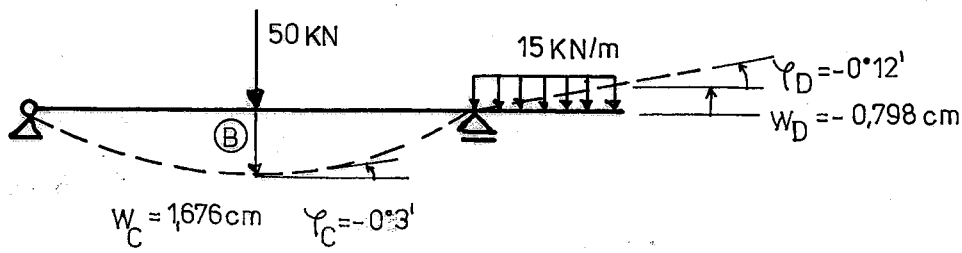


Figura 9.3.

$$w_C = \frac{M_{f,C}}{EI_y} \le w_{adm} \Rightarrow I_{y,nec} \ge \frac{M_{f,C}}{w_{adm} E} = \frac{(225 - 67{,}5)\cdot 10^{12}}{10 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5} \cdot 10^{-4} = 7500\,\text{cm}^4.$$

Din tabel (Anexa 6) aleg profil I 28 (I_y = 7590 cm^4) și cu această secțiune se verifică săgeata:

$$w_C = \frac{(225 - 67{,}5)\cdot 10^{12}}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 7590 \cdot 10^4} = 9{,}9\,\text{mm} < w_{adm} = 10\,\text{mm}.$$

E 9.2: Să se determine valoarea forței P, astfel încât săgeata la jumătatea deschiderii grinzii din figura 9.4.a, să fie nulă.

Rezolvare:

Condiția ca săgeata să fie nulă se scrie:

$$w_C = \frac{M_{f,C}}{EI_y} = 0 \Rightarrow M_{f,C} = 0.$$

Pentru determinarea momentului fictiv la jumătatea deschiderii se parcurg următoarele etape:

- se trasează diagramele de momente M_1, M_2 și M_3 pe grinda reală (figura 9.4.b);
- se construiește grinda fictivă, înlocuind reazemele grinzii reale conform tabelului 9.1 (figura 9.4.c);
- se încarcă grinda conjugată cu diagrama de momente M_1 răsturnată (figura 9.4.d):
  - se desfac articulațiile interioare din A și B și se înlocuiesc cu reacțiunile corespunzătoare:

$$V_A = V_B = \frac{2}{3} 45 \cdot 3 = 90\,\text{kNm}^2;$$

  - se determină momentul fictiv la jumătatea deschiderii:

$$M_{f,C}^{(1)} = 90 \cdot 3 - 90 \cdot \frac{3}{8} 3 = 168{,}75 \text{ kNm}^3.$$

Încărcăm apoi grinda conjugată cu diagrama de momente M_2 răsturnată și vom determina eforturile fictive în secțiunile C și D. Pentru aceasta:

- se desface articulația interioară din B și de înlocuiește cu reacțiunile necunoscute V_B, egale și cu semne contrare pe cele două capete de bară (figura 9.2.f);
- se determină V_B din ecuațiile de echilibru ale barei A-B:

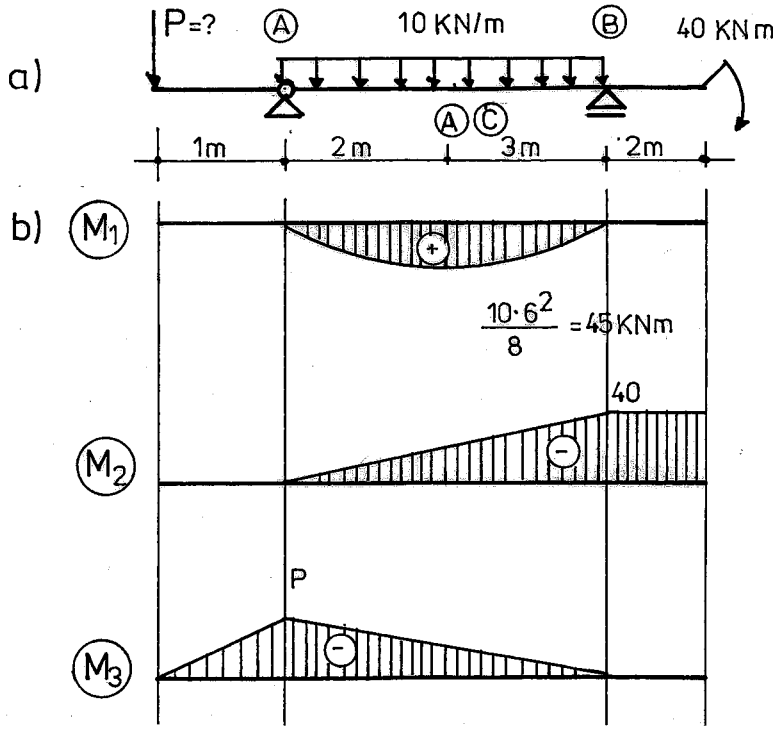
$$R_2 = \frac{1}{2} 30 \cdot 6 = 90 \text{ kNm}^2;$$

$$V_A = \frac{2}{6} R_2 = \frac{90}{3} = 30 \text{ kNm}^2; \quad V_B = \frac{4}{6} R_2 = \frac{2}{3} 90 = 60 \text{ kNm}^2;$$

- se calculează eforturile fictive în secțiunile C și D:

$$T_{f,C}^{(2)} = -30 + \frac{1}{2} 15 \cdot 3 = -7{,}5 \text{ kNm}^2;$$

$$M_{f,C}^{(2)} = -30 \cdot 3 + \frac{1}{2} 15 \cdot 3 \cdot 1 = -67{,}5 \text{ kNm}^3;$$



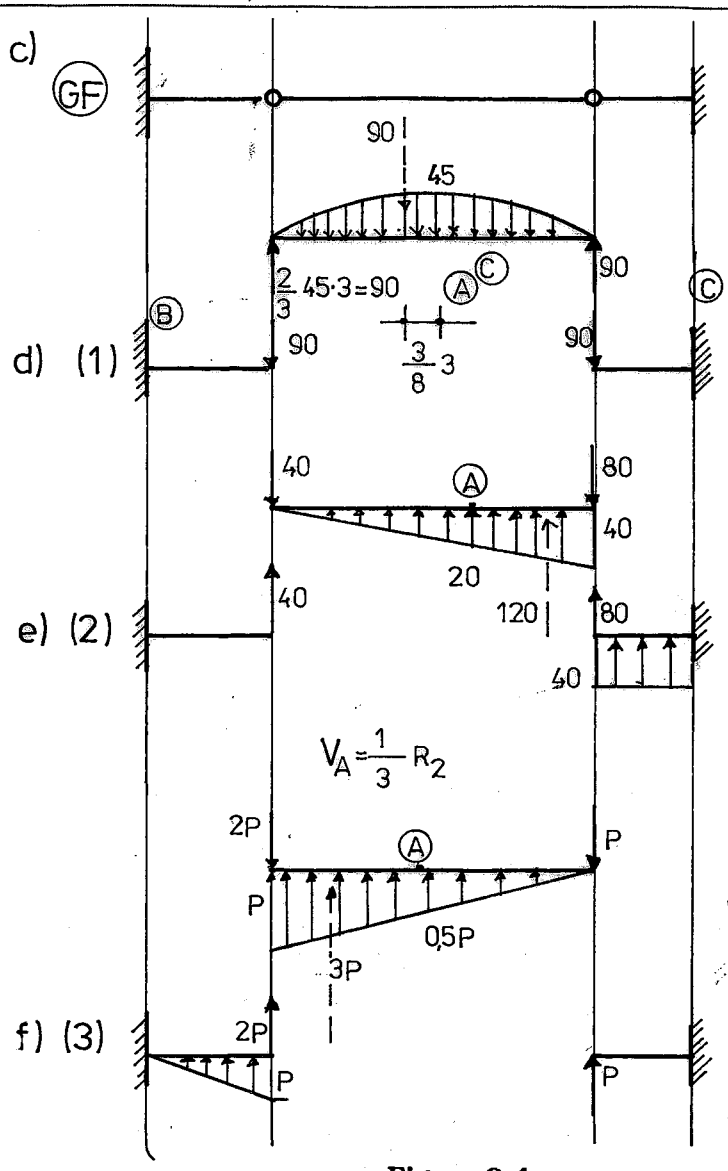


Figura 9.4.

$$T_{f,D}^{(2)} = 60 + \frac{1}{3}30 \cdot 2 = 80\,\text{kNm}^2; \quad M_{f,D}^{(2)} = 60 \cdot 2 + \frac{1}{3}30 \cdot 2 \cdot 1{,}5 = 150\,\text{kNm}^3.$$

- se încarcă grinda conjugată cu diagrama de momente M_3 răsturnată (figura 9.4.f):
  - se desfac articulațiile interioare din A și B și se înlocuiesc cu reacțiunile corespunzătoare:

$$R_3 = \frac{1}{2}P \cdot 6 = 3P;$$

$$V_A = \frac{1}{3}R_3 = P; \quad V_B = \frac{2}{3}R_3 = 2P;$$

- se determină momentul fictiv la jumătatea deschiderii:

$$M_{f,C}^{(3)} = -P \cdot 3 + \frac{1}{2}0{,}5P \cdot 3 \cdot \frac{1}{3}3 = -2{,}25P.$$

- Momentul fictiv la jumătatea deschiderii este:

$$M_{f,C} = M_{f,C}^{(1)} + M_{f,C}^{(2)} + M_{f,C}^{(3)} = 168{,}75 - 90 - 2{,}25P = 0.$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{168{,}75 - 90}{2{,}25} = 35 \text{ kN}.$$

C. TEMA LUCRĂRII

Problema 9.1: Să se determine săgeata și rotirea în capătul liber al consolei din figura 9.5, știind că E = $2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm2.

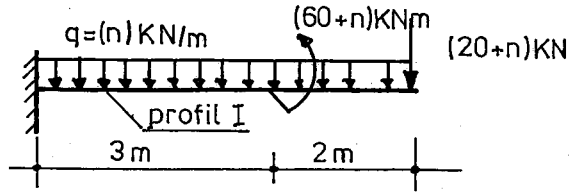
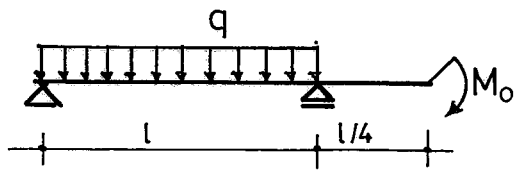


Figura 9.5.

Tabelul 9.3.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	≥11
Profil I	16	18	20	22	24	26	28	30	32	36	40

Problema 9.2: Să se verifice dacă grinda din figura 9.6, confecționată din profil I 40, oțel OL 37, satisface condiția de rezistență. Să se verifice apoi condiția de rigiditate la jumătatea deschiderii, știind că f_{adm} = l/300 și să se determine rotirea în capătul liber.



q = (20+n) kN/m;

M_o= (60-n) kNm;

l = 6,0 m.

Figura 9.6.

Problema 9.3: Pentru bara din figura 9.7, confecționată din oțel OL 37, se cere:

a).Determinarea valorii parametrului α, astfel încât rotirea în reazemul A să fie nulă;

b).Cu α determinat mai sus, să se găsească P_{cap} din condiția de rezistență;

c).Să se traseze diagramele tensiunilor σ, τ_{xz} și τ_{xy} la jumătatea deschiderii, cu specificarea valorilor în punctele 1, 2 și 3 marcate în figura 9.7.b.

Se dă: l = (5 – 0,1n) m.

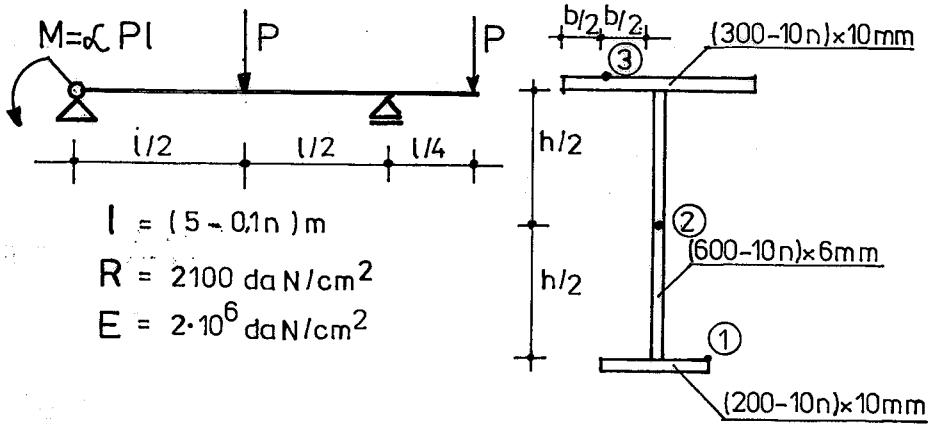


Figura 9.7.

D. TEST DE VERIFICARE A CUNOȘTINȚELOR

1. Grinzile încovoiate au deplasări longitudinale:
   a).mici și se pot neglija;
   b).mici dar nu pot fi neglijate;
   c).mari și nu pot fi neglijate.

2. Care dintre următoarele ipoteze sunt admise la stabilirea ecuației axei deformate a grinzilor încovoiate?
   a).ipoteza secțiunilor plane;
   b).lungimea axei neutre nu se modifică după deformare;
   c).ipoteza micilor deformații.

3. Axa deformată a barei supusă la încovoiere simplă este:
   a).o curbă continuă;
   b).o curbă netedă;
   c).o curbă discontinuă (cu salturi) în anumite puncte.

4. La intregrarea directă a ecuației diferențiale de ordinul II, precizarea constantelor de integrare se face punând condiții la limită în reazeme și limite de interval. Ce condiții se scriu într-o articulație?
   a).$w = 0$;
   b).$\varphi = 0$;
   c).nici una.

5. La integrarea directă a ecuației de ordinul IV a axei deformate, ce condiții se pun într-un capăt liber?
   a).$w = 0$;
   b).$\varphi = 0$;
   c).$T = 0$;
   d).$M = 0$.

6. Se dă grinda din figura 9.8. Care este schema statică a grinzii conjugate corespunzătoare?

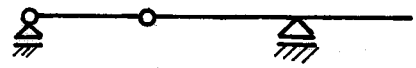
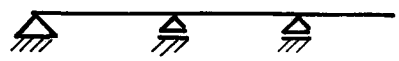
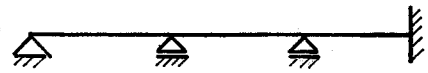


Figura 9.8.

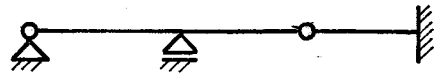
a).



b).



c).



7. Se dă grinda cu rigiditate variabilă din figura 9.9. Care este grinda conjugată corespunzătoare?

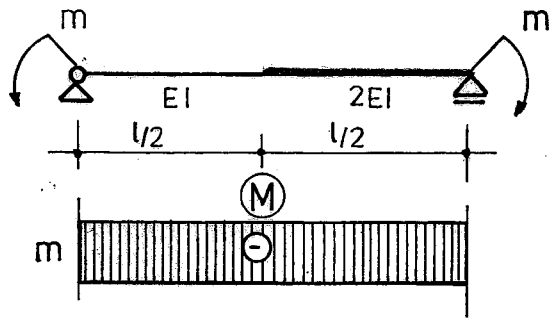
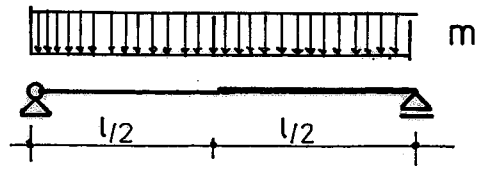
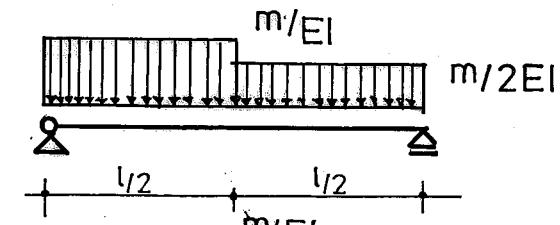


Figura 9.9.

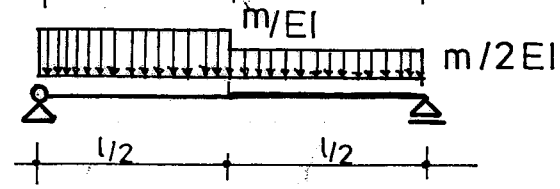
a).



b).



c).



8. Pe grinda reală există un reazem simplu intermediar. Care sunt condițiile care se pun în vederea transformării lui în reazem conjugat?
   a).w = 0;
   b).$M^{st}=M^{dr}$;

c).$\varphi^{st} = \varphi^{dr}$;
d).$T^{st} = T^{dr}$.

9. Cărui reazem conjugat îi corespund condițiile $M_f = 0$ și $T_f \neq 0$?
   a).reazem simplu marginal;
   b).reazem simplu intermediar;
   c).încastrare;
   d).capăt liber.

10. Se dă grinda din figura 9.10, ale cărei deplasări s-au calculat prin metoda parametrilor inițiali. Care parametri sunt cunoscuți de la început?

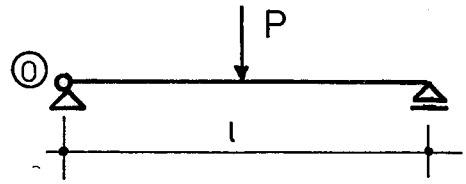


Figura 9.10.

   a).săgeata și rotirea în origine;
   b).momentul și forța tăietoare în origine;
   c).săgeata și momentul în origine.

11. Care dintre metodele de calcul ale deplasărilor se poate aplica cu succes grinzilor static nedeterminate?
   a).integrarea directă a ecuației de ordinul IV;
   b).metoda grinzii conjugate;
   c).metoda peremetrilor inițiali.

12. Care este efectul forțelor tăietoare asupra deplasărilor grinzilor încovoiate?
   a).produc deplasări axiale;
   b).produc săgeți suplimentare;
   c).produc rotiri suplimentare.

13. Care este secțiunea unde se produce săgeata maximă?
   a).aproximativ la jumătatea deschiderii grinzilor simplu rezemate;
   b).în secțiunea unde se anulează rotirea.

14. Condiția de rigiditate se exprimă în:
   a).tensiuni;
   b).eforturi;

c).deplasări.

15. Săgețile pozitive se măsoară în sens:
a).ascendent (opus axei Oz);
b).descendent (sensul axei Oz).

Lucrarea 10:

TORSIUNEA BARELOR DREPTE

A.NOȚIUNI TEORETICE

1.Generalități

O bară este solicitată la torsiune dacă forțele interioare se reduc, în secțiunea transversală la un moment al cărui vector este dirijat după axa barei Ox. Momentul de torsiune M_t este pozitiv dacă vectorul are sensul normalei exterioare a secțiunii.

Variația momentului de torsiune în lungul barei este similară cu variația forței tăietoare T în grinzi; altfel spus are loc relația diferențială:

$$\frac{dM_t}{dx} = -m,$$

unde m reprezintă momentul de torsiune uniform repartizat de pe bară.

Diagramele de variație ale momentului de torsiune se vor construi deci, prin analogie, ca și diagramele de forță tăietoare.

În secțiunile transversale ale barelor supuse la torsiune apar tensiuni tangențiale τ. Caracterul deformației și deci mărimea și distribuția acestor tensiuni sunt determinate de forma secțiunii transversale a barei. În cele ce urmează se vor indica metodele de calcul practic pentru trei categorii de bare:

- Bare cu secțiune circulară sau inelară – a căror rezolvare se poate face exact cu metodele Rezistenței materialelor;
- Bare cu pereți subțiri având secțiunea cu profil deschis;
- Bare cu pereți subțiri având secțiunea cu profil închis.

Pentru barele cu pereți subțiri vor fi indicate metode aproximative de calcul.

2.Bare de secțiune circulară și inelară

Pentru bare de secțiune circulară și inelară, relația cu care se determină tensiunea tangențială într-un punct este:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} r,$$

unde r este distanța de la axa barei la punctul considerat, iar I_p este momentul de inerție polar al secțiunii.

Tensiunile extreme se produc în punctele de pe conturul secțiunii barei:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p},$$

unde W_p este modulul de rezistență polar al secțiunii. El se calculează cu relația:

$$W_p = \frac{I_p}{R},$$

unde R este raza secțiunii. În funcție de diametru, modulul de rezistență polar se determină cu relațiile de mai jos:

$$W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16}, \text{ pentru secțiuni circulare și}$$

$$W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right], \text{ pentru secțiuni inelare.}$$

Pornind de la condiția de rezistență, *problemele Rezistenței materialelor, în cazul torsiunii barelor circulare sau inelare*, iau următoarele forme:

- VERIFICAREA:

Pentru barele cu secțiune constantă, verificarea se face în secțiunea cu efort maxim:

$$\tau_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{W_p} \le R_f,$$

unde R_f este rezistența la forfecare a materialului.

- DIMENSIONAREA:

Se determină din condiția de rezistență:

$$W_{p.nec} \ge \frac{|M_t|_{max}}{R_f},$$

apoi se stabilesc dimensiunile reale ale secțiunii și se verifică.

- EFORTUL CAPABIL:

Momentul de torsiune capabil al secțiunii este, din condiția de rezistență:

$$M_{t.cap} = W_p R_f.$$

Condiția de rigiditate, indiferent de forma secțiunii, se scrie sub forma:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_p} \le \theta_{adm}$$

unde: θ este unghiul de torsiune specific și
G este modulul de elasticitate transversal;
$\theta_{adm} = (0{,}15...0{,}30)°/m.$

Unghiul de torsiune φ se determină cu relația:

$$\varphi = C + \int_0^x \frac{M_t}{GI_p} \cdot dx$$, în care integrala reprezintă aria diagramei momentelor de torsiune între limitele de integrare; constanta C se determină din condiții la limită (de tipul φ în secțiunea de încastrare egal zero).

Dacă este necesar, pentru barele de secțiune circulară și inelară, se poate face o dimensionare și din condiția de rezistență:

$$I_{p,nec} = \frac{|M_t|_{max}}{G\theta_a};$$

se stabilesc dimensiunile și se verifică atât condiția de rezistență cât și cea de rigiditate.

3.Bare cu pereți subțiri având secțiunea cu profil deschis

În cazul barelor a căror secțiune este formată din n dreptunghiuri înguste legate rigid între ele, se consideră că fiecare dreptunghi lucrează independent. În consecință, generalizând formulele obținute pentru secțiunea dreptunghiulară, se poate determina un moment de inerție convențional la torsiune egal cu:

$$I_t = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} h_i b_i^3$$, dacă raportul $\frac{h_i}{b_i} \geq 10$,

unde: h_i = lungimea dreptunghiului;

b_i = grosimea dreptunghiului;

Tensiunea extremă apare la mijlocul laturii de grosime maximă (b_{max}), condiția de rezistență devenind:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_t} \cdot b_{max} \leq R_f$$

- VERIFICAREA:

Pentru barele cu secțiune constantă, condiția de rezistență de mai sus se verifică în secțiunea maxim solicitată.

Condiția de rigiditate devine:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_t} \leq \theta_{adm}$$

- DIMENSIONAREA: nu se poate face decât prin încercări.

- EFORTUL CAPABIL: $M_{t,cap} = \frac{I_t}{b_{max}} R_f$.

4.Bare cu pereți subțiri având secțiunea cu profil închis

Rezolvarea barelor cu pereți subțiri cu profil închis se bazează pe observația că tensiunile tangențiale formează un flux care este constant pe grosimea pereților. Tensiunea tangențială are direcția tangentei la axa mediană a peretelui, într-un punct curent ea calculându-se cu relația:

$$\tau = \frac{M_t}{\Omega \cdot \delta},$$

unde δ reprezintă grosimea peretelui și Ω este dublul ariei mărginite de conturul median al secțiunii.

Tensiunea maximă se produce unde grosimea este minimă:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\Omega \cdot \delta_{min}}.$$

- VERIFICAREA:

Pentru barele cu secțiune constantă, condiția de rezistență se verifică în secțiunea maxim solicitată:

$$\tau_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{\Omega \cdot \delta_{min}} \le R_f;$$

Condiția de rigiditate devine:

$$\theta = \frac{M_t}{GI_t} \le \theta_{adm},$$

unde momentul de inerție convențional la torsiune se determină cu relația:

$$I_t = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}.$$

În cazul când secțiunea este alcătuită numai din pereți drepți, integrala pe contur se poate scrie ca și o sumă:

$$\oint \frac{ds}{\delta} = \sum_i \frac{h_i}{\delta_i},$$

unde h_i este lungimea peretelui iar δ_i este grosimea corespunzătoare, presupusă constantă pe porțiuni de perete rectilinii.

- DIMENSIONAREA: nu se poate face decât prin încercări.

- EFORTUL CAPABIL: $M_{t,cap} = \Omega \cdot \delta_{min} \cdot R_f$.

B. EXEMPLE DE CALCUL

E 10.1: Să se dimensioneze bara supusă la torsiune pură din figura10.1, din secțiune inelară având raportul diametrelor d/D = 0,8 și oțel OL 37, astfel încât să fie satisfăcute condițiile de rezistență și rigiditate ($\varphi_{adm} = 1°$).

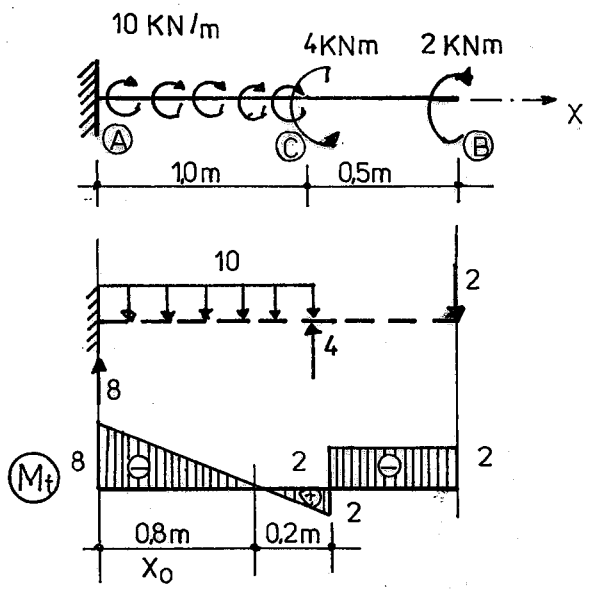


Figura 10.1.

Rezolvare:

Din tabele (Anexa 1 și 2) se scot: $R_f = 120$ N/mm^2 și $G = 80\,000$ N/mm^2.

Se trasează diagrama momentelor de torsiune prin analogie cu o diagramă de forță tăietoare (figura 10.1). Momentul de torsiune maxim apare în secțiunea de încastrare A și este $|M_t|_{max} = 8$ kNm. Momentul de torsiune se anulează în secțiunea situată la distanța x_o de capătul încastrat:

$$x_o = \frac{M_{t,A}}{m} = \frac{8}{10} = 0{,}8\ \text{m}.$$

Din condiția de rezistență rezultă:

$$W_{p.nec} \geq \frac{|M_{t.A}|}{R_f} = \frac{8 \cdot 10^6}{120} \cdot 10^{-3} = 66{,}67\,cm^3.$$

Conform relației de calcul a modulului de rezistență polar pentru secțiuni inelare:

$$W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right] \geq 66{,}67\,,$$ în care se înlocuiește raportul diametrelor d/D = 0,8. Rezultă astfel:

$$D_{nec} \geq \sqrt[3]{\frac{66{,}67 \cdot 16}{\pi\left(1 - 0{,}8^4\right)}} = 8{,}3\,cm.$$

Aleg: D = 83 mm ; d = 0,8·D = 0,8·83 = 66,5 mm, deci grosimea peretelui rezultă t = 8,25 mm și aleg t= 8 mm. Atunci secțiunea aleasă va avea:

D = 83 mm și d = 67 mm.

Verificarea secțiunii alese:

$$I_p = \frac{\pi}{32}\left(8{,}3^4 - 6{,}7^4\right) = 268{,}08\,cm^4;$$

$$W_p = \frac{268{,}08}{8{,}3/2} = 64{,}6\,cm^3;$$

$$\tau_{max} = \frac{8 \cdot 10^6}{64{,}6 \cdot 10^3} = 123{,}8\,N/mm^2 > R_f = 120\,N/mm^2.$$

Secțiunea aleasă nu verifică condiția de rezistență și deci voi alege altă secțiune, cu grosimea peretelui t = 9 mm. Atunci noua secțiune va fi:

D = 83 mm și d = 65 mm.

Verificăm această secțiune:

$$I_p = \frac{\pi}{32}\left(8{,}3^4 - 6{,}5^4\right) = 404{,}56\,cm^4;$$

$$W_p = \frac{404{,}56}{8{,}3/2} = 97{,}48\,cm^3;$$

$$\tau_{max} = \frac{8 \cdot 10^6}{97{,}48 \cdot 10^3} = 82\,N/mm^2 > R_f = 120\,N/mm^2.$$

Diagrama tensiunilor tangențiale este reprezentată în figura 10.2.

Această secțiune verifică condiția de rezistență și deci se poate trece la verificarea condiției de rigiditate:

$$\varphi_{max} \leq \varphi_{adm}\,.$$

Unghiul de torsiune φ se determină cu relația:

$$\varphi(x) = C + \frac{1}{GI_p}\int_0^x M_t\,dx\,,$$ unde integrala reprezintă aria diagramei momentelor de torsiune din origine până în secțiunea x, iar constanta C se determină din condiția ca rotirea în încastrare să fie nulă: pentru x = 0 vom

avea $\varphi(0) = 0$ și cum inegrala este nulă, rezultă $C = 0$.

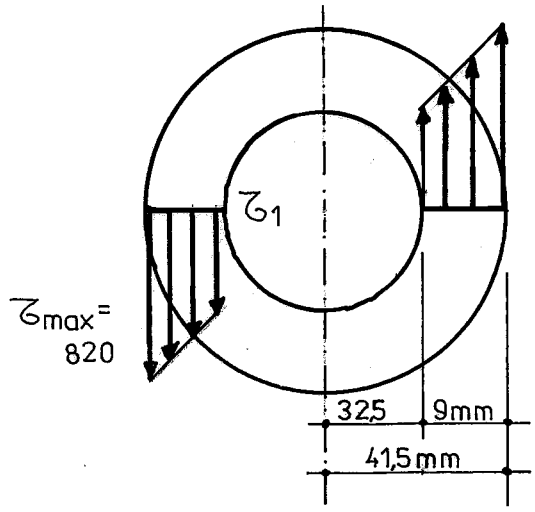


Figura 10.2.

Pentru a stabili rotirea maximă se determină, în această problemă, unghiurile de torsiune în secțiunile caracteristice:

$$\varphi_A = \varphi(0) = 0; \quad \varphi_D = \varphi(0{,}8) = \frac{1}{GI_p}\left(\frac{1}{2}8 \cdot 0{,}8\right) = \frac{3{,}2}{GI_p};$$

$$\varphi_C = \varphi(1) = \varphi_D - \frac{1}{GI_p}\left(\frac{1}{2}2 \cdot 0{,}2\right) = \frac{3{,}0}{GI_p};$$

$$\varphi_B = \varphi(1{,}5) = \varphi_D + \frac{1}{GI_p}(2 \cdot 0{,}5) = \frac{4{,}0}{GI_p}.$$

Unghiul de torsiune maxim se produce în capătul liber B și este egal cu:

$$|\varphi|_{max} = \varphi_B = \frac{4{,}0 \cdot 10^9}{80000 \cdot 404{,}56 \cdot 10^4} = 0{,}0124 \text{ radiani.}$$

Unghiul de torsiune admisibil, transformat în radiani este:

360° ... ... 2π radiani

1° ... ... x radiani

$$1° = \frac{2\pi}{360°} = 0{,}0174 \text{ radiani.}$$

În cosecință: $|\varphi|_{max} = 0{,}0124$ radiani $< \varphi_{adm} = 0{,}0174$ radiani, deci bara verifică și condiția de rigiditate.

E 10.2: Să se verifice bara cu pereți subțiri din figura 10.3, alcătuită din oțel OL 37, supusă la torsiune. Să se calculeze apoi unghiul de torsiune maxim.

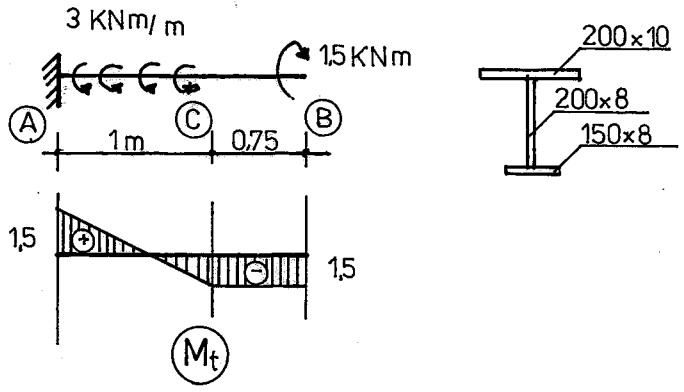


Figura 10.3.

Rezolvare:

Din tabele (Anexa 1 și 2) se scot: $R_f = 120\ N/mm^2$ și $G = 80\,000\ N/mm^2$.

Se trasează diagrama momentelor de torsiune prin analogie cu o diagramă de forță tăietoare (figura 10.3). Momentul de torsiune maxim este $|M_t|_{max} = 1,5$ kNm. Momentul de torsiune se anulează în secțiunea situată la distanța $x_o = 0,5$m de capătul încastrat.

Momentul de inerție convențional la torsiune al secțiunii este:

$$I_t = \frac{1}{3}\sum_i h_i b_i^3 = \frac{1}{3}\left(20\cdot 1^3 + 20\cdot 0,8^3 + 15\cdot 0,8^3\right) = 12,64\ cm^4$$

tensiunea maximă se produce la jumătatea dreptunghiului cu grosimea cea mai mare, deci în talpa superioară, și este:

$$\tau_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{I_t} b_{max} = \frac{1,5\cdot 10^6}{12,64\cdot 10^4}\cdot 10 = 118,67\ N/mm^2$$

$$\tau_{max} = 118,67\ N/mm^2 < R_f = 120\ N/mm^2,$$

deci condiția de rezistență este satisfăcută.

Determinarea unghiului de torsiune se face cu relația:

$$\varphi(x) = C + \frac{1}{GI_t}\int_0^x M_t(x)\cdot dx\,.$$

Din condiția ca unghiul de torsiune să fie nul în încastrare, rezultă:

$$\varphi_A = \varphi(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Unghiul de torsiune în secțiunea unde se anulează momentul de torsiune este:

$$\varphi_C = \varphi(0{,}5) = \frac{10^9}{8 \cdot 10^4 \cdot 12{,}64 \cdot 10^4}\left(\frac{1}{2}1{,}5 \cdot 0{,}5\right) = 0{,}037 \text{ radiani.}$$

Unghiul de torsiune în capătul liber este:

$$\varphi_B = \varphi(1{,}75) = \frac{10^9}{8 \cdot 10^4 \cdot 12{,}64 \cdot 10^4}(-1{,}5 \cdot 0{,}75) = -0{,}111 \text{ rad.}$$

Unghiul de torsiune maxim se produce deci în capătul liber și este de aproximativ 6°22'30".

E 10.3: Să se determine valoarea maximă pe care o poate lua momentul de torsiune uniform distribuit m_t, care solicită bara cu pereți subțiri din figura 10.4, confecționată din oțel OL 37, având secțiunea cu profil închis. Să se calculeze apoi unghiul de torsiune maxim.

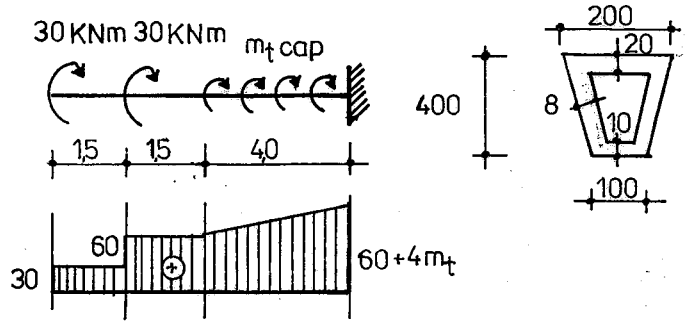


Figura 10.4.

Rezolvare:

Din tabele (Anexa 1 și 2) se scot: $R_f = 120$ N/mm^2 și $G = 80\,000$ N/mm^2.

Se trasează diagrama momentelor de torsiune prin analogie cu o diagramă de forță tăietoare (figura 10.4). Momentul de torsiune maxim este $|M_t|_{max} = (60+4m_t)$ kNm.

Condiția de rezistență se scrie:

$$\tau_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{\Omega \cdot \delta_{min}} \le R_f,$$

unde Ω este dublul ariei interioare, considerată între axele mediane ale pereților:

$$\Omega = 2A_{int} = 2\left(40 \cdot 10 + 2 \cdot \frac{1}{2} 40 \cdot 5\right) = 1200 \text{ cm}^2.$$

Momentul capabil al secțiunii este:

$$M_{t,cap} = \Omega \cdot \delta_{min} \cdot R_f = 1200 \cdot 10^2 \cdot 8 \cdot 120 \cdot 10^{-6} = 115{,}2 \text{ kNm}.$$

Din egalitatea momentului de torsiune maxim cu momentul de torsiune capabil rezultă valoarea încărcării capabile căutate:

$$|M_t|_{max} = M_{cap}$$

$$60 + 4m_t = 115{,}2 \Rightarrow m_t = \frac{115{,}2 - 60}{4} = 13{,}8 \text{ kNm/m}.$$

Pentru că diagrama momentelor de torsiune este pozitivă, rezultă că unghiul de torsiune maxim se produce în capătul liber și va fi egal cu constanta de integrare.

Momentul de inerție convențional la torsiune al secțiunii este:

$$I_t = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}},$$

unde, pentru secțiuni alcătuite din dreptunghiuri, intrgrala devine:

$$\oint \frac{ds}{\delta} = \sum_i \frac{s_i}{\delta_i} = \frac{100}{10} + \frac{200}{20} + 2\frac{412{,}3}{8} = 123{,}08$$

Observație: latura înclinată a secțiunii are lungimea

$$l = \sqrt{10^2 + 20^2} = 41{,}23 \text{ cm}.$$

Atunci:

$$I_t = \frac{1200^2}{123{,}08} = 11700{,}18 \text{ cm}^4.$$

Din condiția: $\varphi(l) = C + \frac{1}{GI_t} \int_0^l M_t dx = 0$, rezultă:

$$C = -\frac{10^9}{8 \cdot 10^4 \cdot 11700{,}18 \cdot 10^4}\left[30 \cdot 1{,}5 + 60 \cdot 1{,}5 + 60 \cdot 4 + \frac{1}{2}(13{,}4 \cdot 4) \cdot 4\right]$$

$$C = -0{,}052 \text{ radiani}.$$

Unghiul de torsiune maxim este: $\varphi_A = C = -0{,}052 \text{ rad} = -2°58'17''$.

C. TEMA LUCRĂRII

Problema 10.1: Să se dimensioneze bara din figura 10.5, confecționată din oțel OL 37, din secțiune circulară plină și apoi din secțiune inelară având raportul laturilor (d/D) = 0,8. Să se calculeze apoi unghiul de torsiune maxim în cele două cazuri și să se compare valorile obținute.

Date numerice: $M_{t,1}=(12,5 - 0,5n)$ kNm;
$M_{t,2}=(3,0 + 0,1n)$ kNm;
$m_t = 0,5$ kNm/m.

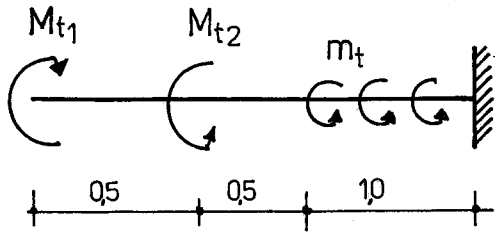


Figura 10.5.

Problema 10.2: Să se verifice rezistența și rigiditatea barei cu pereți subțiri din figura10.6, alcătuită din oțel OL 37.

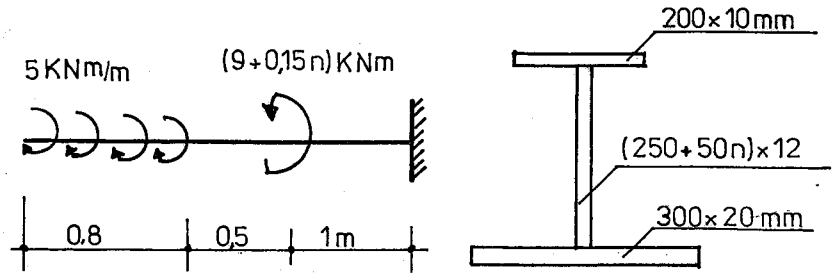


Figura 10.6.

Problema 10.3: Să se stabilească încărcarea capabilă pentru bara cu pereți subțiri din figura 10.7, alcătuită din oțel OL 37. Să se verifice apoi condiția de rigiditate știind că $\varphi_{adm}=3°$.

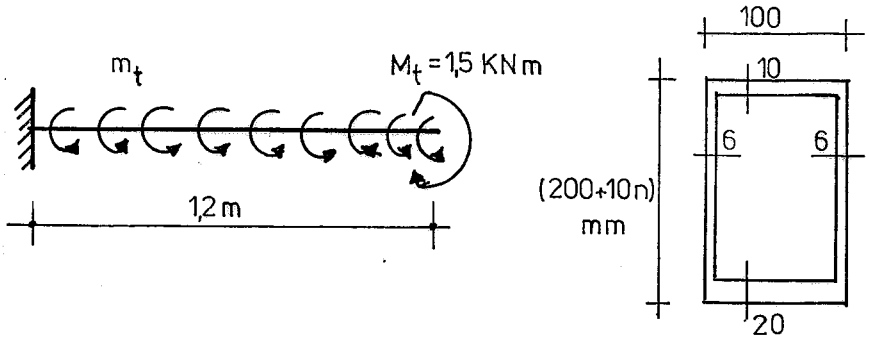


Figura 10.7.

D. TEST DE VERIFICARE A CUNOȘTINȚELOR

1. Momentul de torsiune pozitiv are sensul:
   a).normalei exterioare;
   b).axei barei;
   c).axei Ox.

2. În cazul unei bare cu secțiune circulară, supusă la torsiune pură, generatoarele longitudinale:
   a).rămân drepte;
   b).devin elice curbe în spațiu;
   c).devin curbe plane.

3. Care dintre ipotezele de mai jos nu se aplică în cazul torsiunii barelor de secțiune dreptunghiulară?
   a).ipoteza micilor deformații;
   b).principiul lui Saint-Venant;
   c).ipoteza secțiunilor plane.

4. Ce fel de tensiuni apar în secțiunile barelor supuse la torsiune pură?
   a).tensiuni normale;
   b).tensiuni tangențiale.

5. Ce direcție au tensiunile în cazul unei secțuni inelare?
   a).tangente la rază;
   b).perpendiculare pe rază;
   c).tangente la contur.

6. În cazul torsiunii se aplică legea lui Hooke?

a).da;
b).nu.

7. Unde se obține tensiunea maximă într-o secțiune dreptunghiulară supusă la torsiune?
   a).la jumătatea laturii lungi;
   b).la jumătatea laturii scurte;
   c).în centrul de greutate al secțiunii.

8. Dacă deplanarea secțiunilor unei bare cu secțiune dreptunghiulară supusă la torsiune se poate produce nestingherit, spunem că solicitarea este:
   a).torsiune liberă;
   b).torsiune pură;
   c).torsiune împiedecată.

9. Fie o bară de secțiune inelară supusă la torsiune. Un punct curent al secțiunii sale transversale, are sau nu deplasări longitudinale?
   a).da;
   b).nu.

10. Care sunt mărimile care caracterizează rigiditatea la torsiune a unei bare?
    a).modulul de elasticitate longitudinal;
    b).modulul de elasticitate transversal;
    c).momentul de inerție polar.

11. Care bare au o comportare mai bună la torsiune?
    a).barele cu pereți subțiri cu profil deschis;
    b).barele cu pereți subțiri cu profil închis.

12. Momentul de inerție convențional la torsiune se calculează în raport cu:
    a).axa neutră;
    b).axa centrală principală în raport cu care se produce torsiunea;
    c).nu depinde de sistemul de axe.

13. Ce fel de deformații se produc în bara circulară supusă la torsiune pură?
    a).deformații elastice;
    b).deformații longitudinale;
    c).deformații transversale;
    d).lunecări.

14. Ce condiții se pun în capătul încastrat al unei bare torsionate?
    a).momentul de torsiune să fie nul;
    b).unghiul de torsiune să fie nul;

c).ambele condiții de mai sus.

15. Axa unei bare supusă la torsiune:
a).se deformează, devenind o curbă plană;
b).se deformează, devenind o curbă în spațiu;
c).nu se deformează, rămâne dreaptă.

RĂSPUNSURILE TESTELOR DE VERIFICARE A CUNOȘTINȚELOR

LUCRAREA 1. 1:a,b,c; 2:a,c; 3:c; 4:a; 5:b; 6:a; 7:a; 8:c; 9:a; 10:b; 11:b sau a,c; 12:a; 13:nici un răspuns nu este corect; 14:b; 15:a,b.

LUCRAREA 3. 1:b; 2:c; 3:a; 4:c; 5:c; 6:b; 7:a,b; 8:a,b; 9:b,c,d; 10:d; 11:b; 12:a; 13:b; 14:b; 15:a; 16:b_2; 17:a; 18:b_1; 19:b_2,b_3; 20:b_1; 21:b; 22:b; 23:a; 24:b; 25:b; 26:b; 27:b; 28:b; 29:b; 30:b.

LUCRAREA 4. 1:b; 2:a; 3:c; 4:b; 5:b; 6:a; 7:a,b,c; 8:b,c; 9:c; 10:d; 11:b; 12:a; 13:b; 14:c; 15:b.

LUCRAREA 5. 1:a; 2:b; 3:b; 4:a; 5:a; 6:b; 7:c; 8:b; 9:b; 10:a,b; 11:b; 12:b; 13:a; 14:nici un răspuns nu este corect; 15:c.

LUCRAREA 6. 1:b,c; 2:b; 3:c; 4:a; 5:b; 6:a,b; 7:b; 8:b; 9:a; 10:b; 11:a,b,c; 12:b,c; 13:a; 14:a;

LUCRAREA 7. 1:b; 2:a,b,c; 3:c; 4:nici un răspuns nu este corect; 5:a,b,c; 6:a,c; 7:c; 8:a,b,c; 9:b; 10:b; 11:b; 12:a; 13:b; 14:b; 15 :a .

LUCRAREA 8. 1:b; 2:c; 3:b; 4:a; 5:a,b; 6:b; 7:c; 8:a; 9:b; 10:b; 11:b; 12:b; 13:c; 14:a; 15:b.

LUCRAREA 9. 1:a; 2:a,b,c; 3:a,b; 4:a; 5c,d; 6:c; 7:b; 8:a,c; 9:a; 10:c; 11:c; 12:b,c; 13:b; 14:c; 15:b.

LUCRAREA 10. 1:a; 2:b; 3: c; 4:c; 5:b,c; 6:a; 7:a; 8:a; 9:b; 10:b,c; 11:b; 12:b,c; 13:a,d; 14:b; 15:c.

ANEXA 1

Moduli de elasticitate și coeficienți de contracție transversală

Material	Modul de elasticitate longitudinal E daN/cm^2	Modul de elasticitate transversal G daN/cm^2	Coeficient de contracție transversală
Oțeluri carbon	$(2,0 \div 2,1)\cdot 10^6$	$(8,0 \div 8,1)\cdot 10^5$	0,24 ÷ 0,28
Oțeluri aliate	$(2,1 \div 2,2)\cdot 10^6$	$(8,0 \div 8,1)\cdot 10^5$	0,25 ÷ 0,30
Fontă cenușie albă	$(1,15 \div 1,60)\cdot 10^6$	$4,5\cdot 10^5$	0,23 ÷ 0,27
Cupru laminat	$1,1\cdot 10^6$	$4,0\cdot 10^5$	0,31 ÷ 0,34
Cupru trefilat	$1,3\cdot 10^6$	$4,9\cdot 10^5$	-
Bronz fosforos laminat	$1,15\cdot 10^6$	$4,2\cdot 10^5$	0,32 ÷ 0,35
Aluminiu laminat	$0,69\cdot 10^6$	$(2,6 \div 2,9)\cdot 10^5$	0,32 ÷ 0,36
Duraluminiu laminat	$0,71\cdot 10^6$	$3,7\cdot 10^5$	-
Zinc laminat	$0,84\cdot 10^6$	$2,2\cdot 10^5$	0,27
Plumb	$0,17\cdot 10^6$	$0,70\cdot 10^5$	0,42
Sticlă	$0,56\cdot 10^6$	$2,2\cdot 10^5$	0,25
Granit	$0,49\cdot 10^6$	-	-
Calcar	$0,42\cdot 10^6$	-	-
Marmură	$0,56\cdot 10^6$	-	-
Gresie	$0,18\cdot 10^6$	-	-
Zidărie de piatră	$(0,06 \div 0,1)\cdot 10^6$	-	-
Zidărie de cărămidă	$(0,027 \div 0,030)\cdot 10^6$	-	-
Beton marca	$(0,21 \div 0,33)\cdot 10^6$	$(0,08 \div 0,13)\cdot 10^5$	0,20
B 150 –B 400			
Lemn:			
- în lungul fibrelor	$(0,1 \div 0,12)\cdot 10^6$	$0,055\cdot 10^5$	-
- transversal pe fibre	$(0,005 \div 0,01)\cdot 10^6$	-	-
Cauciuc	$0,000\ 08\cdot 10^6$	-	0,47
Bachelită	$0,000\ 43\cdot 10^6$	-	0,36
Celuloid	$(0,000\ 143 \div 0,000\ 275)\cdot 10^6$	-	0,33 ÷ 0,38

ANEXA 2

REZISTENȚE DE CALCUL
pentru construcții civile, industriale și agricole din oțel
(STAS 10108/0 – 78)
în da/cm^2

Specificație	Simbol	Coeficient aplicat față de R	Marca oțelului	
			OL 37	OL 52
A. Produse laminate				
Rezistența normată	R^n	-	2300	3500
Rezistența de calcul				
- întindere, compr., încovoiere;	R	-	2100	3000
- forfecare.	R_f	0,6	1200	1800
B. Cordoane de sudură				
Îmbinări cap la cap solicitate la:				
- compresiune;	R_c^s	1,0	2100	3000
- întindere;	R_i^s	0,8	1700	2400
- forfecare.	R_f^s	0,6	1300	1800
Îmbinări de colț, solicitate la forfecare	R_f^s	0,7	1500	2100
C. Îmbinări nituite cu nituri din			OL 34	OL 44
- forfecare;	R_f^n	0,8	1700	2200
- presiune pe pereții găurii.	R_p^n	2,0	4200	6000
D. Îmbinări bulonate cu șuruburi din grupa			(4.6)	(6.6)
- forfecare;	R_f^b	0,8	1700	2400
- presiune pe pereții găurii;	R_p^b	2,0	4200	6000
- întindere în tijă.	R_i^b	0,8	1700	2400
E. Îmbinări bulonate cu șuruburi brute				
- forfecare;	R_f^b	0,6	1300	1800
- presiune pe pereții găurii;	R_p^b	1,6	3400	4800
- întindere în tijă.	R_i^b	0,8	1700	2400

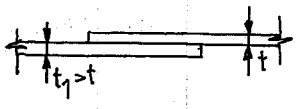
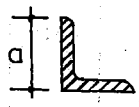
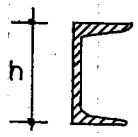
ANEXA 3

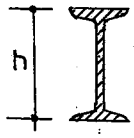
Date pentru îmbinări cu nituri și șuruburi

A. Piese de îmbinare

Nituri	Diametrul de calcul, în mm	13	(15)	17	(19)	21	(23)	25 (28)
	Diametrul nominal, în mm	12	(14)	16	(18)	20	(22)	24 (27)
Șuruburi păsuite	Tipul șurubului	M 12	M 16	M 20	M 22	M 24	M 27	M 30
	Diametrul tijei (de calcul), în mm	13	17	21	23	25	28	31
	Diametrul net în zona filetată, în mm	9,9	13,5	16,9	18,9	20,4	23,2	25,6
	Aria netă în zona filetată, în cm^2	0,770	1,431	2,243	2,805	3,268	4,227	5,147

B. Diametre maxime ale găurilor de nit pentru nituirea tablelor și profilelor

Elementul care se îmbină	Diametrul maxim al găurii de nit (d), în funcție de valoarea t, a, h: (dimensiuni în mm)					
	13	17	21	23	25	28
	4 ... 6	7 ... 8	9 ... 12	10 ... 14	13 ... 18	>18
	≥ 45	≥ 50	≥ 70	≥ 80	≥ 90	≥140
	≥ 80	≥ 120	≥ 160	≥ 200	≥ 240	-

	≥ 180	≥ 240	≥ 300	≥ 360	-	-

A. Distanțele dintre nituri (construcții civile, industriale și agricole)

Distanțe	Bare supuse la		Distanța (figura A.3.1)				
			e	e_1	e_2	e_3	e_4
Minime	Întindere	când marginile sunt tăiate	3*d*	3*d*	2*d*	1,5 *d*	2,6 *d*
		la profiluri laminate				1,2 *d*	
	Compresiune	când marginile sunt tăiate	3*d*	3*d*	2*d*	1,5 *d*	2,6 *d*
		la profiluri laminate				1,2 *d*	
Maxime	Întindere	pe șirurile marginale, când marginea nu este întărită cu corniere de margine	8*d* sau 12*t*	8*d* sau 12*t*	4*d* sau 8*t*	4*d* sau 8*t*	7*d* sau 10,4 *t*
		pe șirurile interioare și pe cele marginale, când există corniere de margine	16*d* sau 24*t*	16*d* sau 24*t*			
	Compresiune	pe șirurile marginale, când marginea nu este întărită cu corniere de margine	8*d* sau 12*t*	8*d* sau 12*t*	4*d* sau 8*t*	4*d* sau 8*t*	7*d* sau 10,4 *t*
		pe șirurile interioare și pe cele marginale, când există corniere de margine	16*d* sau 24*t*	16*d* sau 24*t*			

d – diametrul găurii pentru nituri sau șuruburi;
t – grosimea celui mai subțire element exterior din pachet.

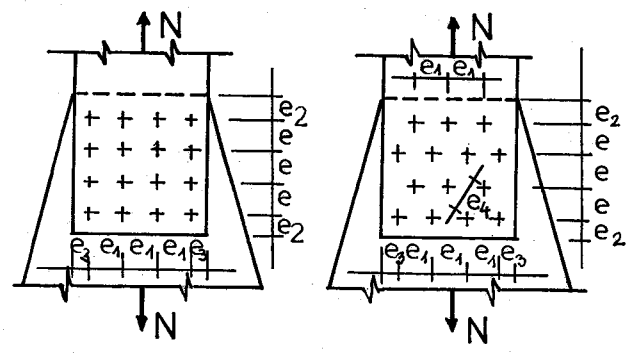


Figura A.3.1.

ANEXA 4

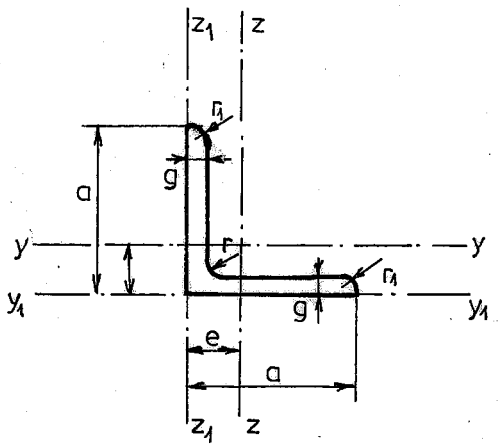
Valori limită ale săgeților elementelor încovoiate

Denumirea elementului	Valoarea limită funcție de deschidere (l)
A. *Construcții din oțel* (STAS 10108/0 - 78 și 1911 - 75)	
1. Grinzile căilor de rulare pentru:	
- poduri rulante manuale	$l/500$
- poduri rulante electrice cu cap. ≤ 50 000 daN	$l/600$
- poduri rulante electrice cu cap. > 50 000 daN	$l/750$
2. Grinzile platformelor industriale	
- când nu susțin linii ferate sau utilaje care produc vibrații	$l/400$ - $l/250$
- susțin linii ferate înguste	$l/400$
- susțin linii ferate cu ecartament normal	$l/600$
3. Grinzile planșeelor între etaje	
- grinzi principale	$l/350$
- celelalte grinzi	$l/250$
4. Grinzile acoperișurilor și planșeelor podurilor clădirilor	
- ferme și grinzi principale	$l/250$
- pane și căpriori	$l/200$
5. Poduri de șosea	
- săgeata din încărcarea totală	$l/400$
- săgeata numai din convoaie	$l/300$
6. Poduri C.F.	
- săgeata verticală din convoaie	$l/500$
- săgeata orizontală	$l/5000$
B. *Construcții din lemn* (orientativ)	
1. Poduri - grinzi compuse	$l/500$
- grinzi cu inima din dulapi bătuți în cuie	$l/500$
- grinzi simple - șosea	$l/300$
- C. F.	$l/500$
2. Grinzi căi rulare	$l/500$
3. Grinzi la planșee intermediare	$l/250$
4. Elementele acoperișurilor și planșeelor podurilor clădirilor	
- ferme	$l/600$
- pane și căpriori	$l/200$
- astereală	$l/150$

ANEXA 5

Caracteristici pentru profilul cornier cu aripi egale

Conform: STAS 424 - 80	PROFIL CORNIER CU ARIPI EGALE Dimensiuni, mase, mărimi statice	Lungimi fixe 4÷12 m	Calități OL 37	Exemplu de notare pe desen: pentru a=50mm; g=5 mm; l=10225 mm; L 50×50×5 ... 10225



I = momentul de inerție raportat la axa de încovoiere respectivă

W = modulul de rezistență raportat la axa de încovoiere respectivă

$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ = raza de giratie raportată la axa de încovoiere respectivă

Denumirea L	Dimensiunile secțiunii, mm				Aria secțiunii A cm²	Masa liniară kg/m	Distanța axelor cm	Marimile statice pentru axele de încovoiere Y - Y; Z - Z		
	a	g	r	r_1				$I_y = I_z$ cm⁴	$W_y = W_z$ cm³	$i_y = i_z$ cm
20×20×3	20	3	3,5	2	1,12	0,88	0,60	0,39	0,28	0,59
20×20×4		4			1,45	1,14	0,64	0,41	0,36	0,58
25×25×3	25	3	3,5	2	1,42	1,11	0,72	0,80	0,45	0,75
25×25×4		4			1,85	1,45	0,76	1,01	0,58	0,74

Anexa 5 (continuare)

25×25×5	25	5	3,5	2	2,26	1,77	0,80	1,20	0,71	0,73
30×30×3	30	3	5	2,5	1,74	1,36	0,84	1,40	0,65	0,90
30×30×4		4			2,27	1,78	0,88	1,80	0,85	0,89
30×30×5		5			2,78	2,18	0,92	2,16	1,04	0,88
35×35×3	35	3	5	2,5	2,04	1,60	0,96	2,29	0,90	1,06
35×35×4		4			2,67	2,09	1,00	2,95	1,18	1,05
35×35×5		5			3,28	2,57	1,04	3,56	1,45	1,04
40×40×3	40	3	6	3	2,35	1,84	1,07	3,45	1,18	1,21
40×40×4		4			3,08	2,42	1,12	4,47	1,55	1,21
40×40×5		5			3,79	2,97	1,16	5,43	1,91	1,20
45×45×4	45	4	7	3,5	3,49	2,74	1,23	6,43	1,97	1,36
45×45×5		5			4,30	3,38	1,28	7,84	2,43	1,35
45×45×6		6			5,08	4,00	1,32	9,16	2,88	1,34
50×50×4	50	4	7	3,5	3,89	3,06	1,36	8,97	2,46	1,52
50×50×5		5			4,80	3,77	1,40	11,0	3,05	1,51
50×50×6		6			5,69	4,47	1,45	12,8	3,61	1,50
50×50×7		7			6,56	5,15	1,49	14,6	4,16	1,49
60×60×5	60	5	8	4	5,82	4,57	1,64	19,4	4,45	1,82
60×60×6		6			6,91	5,42	1,69	22,8	5,29	1,82
60×60×8		8			9,03	7,09	1,77	29,2	6,89	1,80
60×60×10		10			11,10	8,69	1,85	34,9	8,41	1,78
70×70×6	70	6	9	4,5	8,13	6,38	1,93	36,9	7,27	2,13
70×70×7		7			9,40	7,38	1,97	42,4	8,41	2,12
70×70×8		8			10,60	8,36	2,01	47,5	9,52	2,11
70×70×9		9			11,90	9,34	2,05	52,6	10,6	2,10
70×70×10		10			13,10	10,3	2,09	57,2	11,7	2,09
80×80×6	80	6	10	5	9,35	7,36	2,17	55,8	9,57	2,44

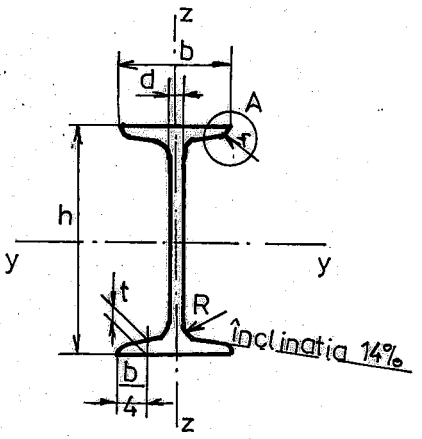
Anexa 5 (continuare)

80×80×8	80	8	10	5	12,30	9,63	2,26	72,2	12,6	2,43
80×80×10		10			15,10	11,9	2,54	87,5	15,4	2,41
90×90×8	90	8	11	5,5	13,90	10,9	2,50	104	16,1	2,74
90×90×9		9			15,50	12,2	2,54	116	18,0	2,74
90×90×10		10			17,10	13,4	2,58	129	21,1	2,74
90×90×11		11			18,70	14,7	2,62	138	21,6	2,72
100×100×8	100	8	12	6	15,5	12,2	2,74	145	19,9	3,06
100×100×10		10			19,2	15,0	2,82	177	24,6	3,04
100×100×12		12			22,7	17,8	2,90	207	29,1	3,03
120×120×10	120	10	13	6,5	23,2	18,2	3,31	313	36,0	3,67
120×120×12		12			27,5	21,6	3,40	368	42,7	3,65
130×130×12	130	12	14	7	30,0	23,6	3,64	472	50,4	3,97
130×130×14		14			34,7	27,2	3,72	540	58,2	3,94
130×130×16		16			39,3	30,9	3,80	605	65,8	3,92
140×140×12	140	12	15	7,5	32,5	25,5	3,90	602	59,7	4,31
140×140×14		14			37,6	29,4	3,98	689	68,8	4,30
140×140×16		16			42,2	37,3	4,20	772	79,1	4,28
150×150×12	150	12	16	8	34,8	27,3	4,12	737	67,7	4,60
150×150×14		14			40,4	31,6	4,21	845	78,2	4,58
150×150×16		16			45,7	35,9	4,29	949	88,7	4,56
150×150×18		18			51,0	40,1	4,37	1 050	99,3	4,54
160×160×12	160	12	17	8,5	37,4	29,7	4,39	913	78,6	4,94
160×160×14		14			43,3	34,0	4,47	1 046	90,8	4,92
160×160×16		16			49,1	38,5	4,55	1 175	103,0	4,89
160×160×18		18			54,8	43,0	4,63	1 299	114,0	4,87

ANEXA 6

Caracteristici pentru profilul I

Conform: STAS 565 - 80	PROFIL I Dimensiuni, mase, mărimi statice	Lungimi fixe 6÷12 m	Calități OL 37	Exemplu de notare pe desen: pentru h=220mm; l=1250 mm; I 22 ... 1250



h= înălțimea profilului
d = grosimea inimii
R = raza de rotunjire interioară a tălpilor
r = raza de rotunjire a tălpilor la vârf
I = momentul de inerție raportat la axa de încovoiere respectivă
W = modulul de rezistență raportat la axa de încovoiere respectivă
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ = raza de girație raportată la axa de încovoiere respectivă
S_y = momentul static al semisecțiunii
b = lățimea tălpilor
t = grosimea medie a tălpilor

Simbol I	Dimensiunile secțiunii, mm				Aria secțiunii A cm²	Masa liniară kg/m	Mărimile statice pentru axele de încovoiere						S_y cm³
							Y - Y			Z - Z			
	h	b	t	D=R			I_y cm⁴	W_y cm³	i_y cm	I_z cm⁴	W_z cm³	i_z cm	
8	80	42	5,90	3,9	7,58	5,95	77,8	19,5	3,20	6,29	3,00	0,91	11,4
10	100	50	6,80	4,5	10,6	8,32	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	19,9
12	120	58	7,70	5,1	14,2	11,2	328	54,7	4,81	21,5	7,41	1,23	31,8
14	140	66	8,60	5,7	18,3	14,4	573	81,9	5,61	36,2	10,71	1,40	47,7

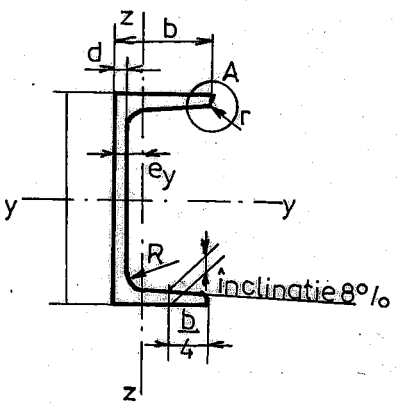
Anexa 6 (continuare)

16	160	74	9,50	6,3	22,8	17,9	935	117	6,40	54,7	14,8	1,55	68,0
18	180	82	10,4	6,9	27,9	21,9	1450	161	7,20	81,3	19,8	1,71	93,4
20	200	90	11,3	7,5	33,5	26,3	2140	214	8,00	117	26,0	1,87	125
22	220	98	12,2	8,1	39,6	31,1	3060	278	8,80	162	33,1	2,02	162
24	240	106	13,1	8,7	46,1	36,2	4250	354	9,59	221	41,7	2,20	206
26	260	113	14,1	9,4	53,4	41,9	5740	442	10,4	228	51,0	2,32	257
28	280	119	15,2	10,1	61,1	48,0	7590	542	11,1	364	61,2	2,45	316
30	300	125	16,2	10,8	69,1	54,2	9800	653	11,9	451	72,2	2,56	381
32	320	131	17,3	11,5	77,8	61,1	12510	782	12,7	555	84,7	2,67	457
36	360	143	19,5	13,0	97,1	76,2	19610	1090	14,2	818	114,0	2,90	638
40	400	155	21,6	14,4	118	92,6	29210	1460	15,7	1160	149,0	3,13	857

ANEXA 7

Caracteristici pentru profilul U

Conform: STAS 564 - 80	PROFIL U Dimensiuni, mase, mărimi statice	Lungimi fixe 6÷12 m	Calități OL 37	Exemplu de notare pe desen: pentru h=120mm; l=1250 mm; U 12 ... 1250



h = înălțimea profilului
d = grosimea inimii
t = grosimea medie a tălpilor
I = momentul de inerție raportat la axa de încovoiere respectivă
W = modulul de rezistență raportat la axa de încovoiere respectivă
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ = raza de giratie raportată la axa de încovoiere respectivă
S_y = momentul static al semisecțiunii
b = lățimea tălpilor
e_y = distanța axei $Z-Z$ de la marginea exterioară a inimii

Simbol U	Dimensiunile secțiunii, mm				Aria secțiunii A cm^2	Masa liniară kg/m	Mărimile statice pentru axele de încovoiere						S_y cm^3	e_y cm
							Y - Y			Z - Z				
	h	b	d	t			I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm	I_z cm^4	W_z cm^3	i_z cm		
6,5	65	42	5,5	7,5	9,03	7,09	57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25	-	1,42
8	80	45	6	8,0	11,0	8,64	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33	15,9	1,45
10	100	50	6	8,5	13,5	10,6	205	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	24,5	1,55
12	120	55	7	9,0	17,0	13,4	364	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	36,3	1,60

Anexa 7 (continuare)

14	140	60	7,0	10,0	20,4	16,0	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	51,4	1,75
16	160	65	7,5	10,5	24,0	18,8	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	68,8	1,83
18	180	70	8,0	11,0	28,0	22,0	1350	150	6,95	114	22,4	2,02	89,6	1,92
20	200	75	8,5	11,5	32,2	25,3	1910	191	7,70	148	27,0	2,14	114	2,01
22	220	80	9,0	12,5	37,4	29,4	2690	245	8,48	197	33,6	2,30	146	2,14
24	240	85	9,5	13,0	42,3	33,2	3600	300	9,22	248	39,6	2,42	179	2,23
26	260	90	10	14,0	48,3	37,9	4820	371	9,99	317	47,7	2,56	221	2,36
30	300	100	10	16,0	58,8	46,2	8030	535	11,7	495	67,8	2,90	316	2,70

BIBLIOGRAFIE

1. Bia, C., Ille, V., Soare, M. V., *Rezistența materialelor și Teoria elasticității*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
2. Deutsch, I., Goia, I., Curtu, I., Neamțu, T., Sperchez, F., *Probleme de Rezistența materialelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
3. Ille, V., *Rezistența materialelor*, partea I, Institutul Politehnic Cluj, 1969.
4. Ille, V., Bia, C., *Rezistența materialelor*, volumul I, Institutul Politehnic Cluj-Napoca, 1980.
5. Ille, V., Bia, C., Cocoves, C., Petrina, P., Pantel, E., Martian, I., Câmpenu, A., Ioani, A.M., *Rezistența materialelor. Culegere de probleme*, Institutul Politehnic Cluj_Napoca, 1983.
6. Massonet, C., Cescotto, S., *Mecanique des materiaux*, vol. I și II, Sciences et Lettres, Liege, 1977, 1979.
7. Mateescu, D., Caraba, I., *Construcții metalice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
8. Mazilu, P., *Rezistența materialelor*, Institutul de Construcții București,1974.
9. Pantel, E., Ioani, A., *Rezistența materialelor*, vol. I, Institutul Politehnic Cluj_Napoca, 1985.
10. Posea, N., Anghel, A., Manea, C., Hotea, G., *Rezistența materialelor. Probleme*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986.
11. Rusu, O., Gall, T., *Probleme moderne ale Rezistenței materialelor*, Editura Tehnică, București, 1970.
12. Simirea, P., Negrei, L., *Construcții metalice. Calculul prin metoda stărilor limită*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.

13. Soare, M.V., Illi, V., Bia, C., Panțel, E., Petrina, P., Iordache, D., Soare, C., *Rezistența materialelor în aplicații*, Editura tehnică, București, 1996.
14. Ungureanu, N., *Rezistența materialelor și Teoria elasticității*, vol. I, Institutul Politehnic Iași, 1979.
15. Tudose, I., Constantinescu, D.M., Stoica, M., *Rezistența materialelor. Aplicații*, Editura Tehnică, București, 1986.